Synesis, v. 7, n. 1, p. 139-154, jan/jun. 2015, ISSN 1984-6754

DIVISÃO POR ZERO E O DESENVOLVIMENTO DOS NÚMEROS TRANSREAIS

DIVISION BY ZERO AND THE DEVELOPMENT OF THE TRANSREAL NUMBERS*

TIAGO SOARES DOS REIS**
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO, BRASIL

RICARDO SILVA KUBRUSLY***
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, BRASIL

Resumo: Fazemos uma digressão a respeito dos números transreais, a transmatemática, o infinito nos transreais e o *nullity*. Uma discussão sobre as novidades que os transreais trazem à matemática e sobre o desafio de serem aceitos pelo meio acadêmico. Propomos uma interpretação contextual para as operações aritméticas entre números transreais, discutimos o fato desses números terem nascido na computação e não na matemática e divagamos sobre a introdução dos novos números: infinito e *nullity*.

Palavras-chave: Divisão por zero; números transreais; transmatemática; infinito; *nullity*.

Abstract: We make a digression about transreal numbers, transmathematics, the infinity in the transreals and the nullity. We discuss on the novelties brought by the transreals to mathematics and on the challenge they face in gaining academic acceptance. We propose a contextual interpretation for arithmetic operations between transreal numbers, we discuss the fact that these numbers were born in the computer, not in the mathematics and we digress on the introduction of new numbers: infinity and nullity.

Keywords: Division by zero; transreal numbers; transmathematics, infinity; nullity.

---

* Artigo recebido em 06/03/2015 e aprovado para publicação pelo Conselho Editorial em 15/06/2015.
** Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/7858280277437268. E-mail: tiago.reis@ifrj.edu.br.
*** Pós-Doutorado pela Purdue University. Doutor em Ciências pela University of Texas at Austin. Currículo lattes: http://lattes.cnpq.br/0383795207009016. E-mail: risk@hcte.ufrj.br.

1. Introdução

Neste texto fazemos uma digressão a respeito da transmatemática, números transreais, o infinito nos transreais e o *nullity*. Uma discussão, um tanto quanto romântica, sobre as novidades que os transreais trazem à matemática e sobre o desafio de adentrar o seleto grupo das teorias bem aceitas no meio acadêmico. A matemática, tida como uma ciência exata, possui, como uma de suas ideias fundamentais, o conceito de número. Não obstante, a história mostra que o entendimento que se tem deste objeto não é um dogma, mas uma percepção que muda com o tempo e com as necessidades que se apresentam no desenvolvimento da sociedade. Alguns capítulos desta história já foram escritos: passamos de números fracionários para irracionais, de positivos para negativos e de reais para imaginários. No presente momento vivemos o surgimento de um novo conjunto numérico. James Anderson propôs os transreais, onde divisão por zero é permitida. Como acontece com uma teoria em seu estado inicial, os transreais passam por um momento de afirmação no meio acadêmico. Trazemos à luz esta discussão. Não há dúvidas de que foi proposto um conceito inovador na matemática. Todavia, apesar de, segundo Anderson, serem aplicados na computação, os transreais não despertaram ainda maiores interesses na comunidade matemática. Teriam eles uma estrutura frágil e inconsistente? Ou consistente, porém irrelevante? Reservam-nos um interessante resultado no futuro ou sua utilidade se restringe aos devaneios poéticos e filosóficos que proporcionam?

Antes de adentrarmos o nosso texto propriamente dito, deixe-nos dar ao leitor uma visão geral do estado de desenvolvimento da transmatemática, a matemática que surge com a permissão da divisão por zero. O conjunto dos números transreais, denotado por $\mathbb{R}^T$, é uma extensão do conjunto dos números reais. James A. D. W. Anderson, o propositor deste novo conjunto numérico, postula a existência, além dos números reais, de três novos elementos, a saber: $-\infty$, ∞ e Φ, chamados, respectivamente, de menos infinito, infinito e *nullity*. Desta forma, $\mathbb{R}^T = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$. A aritmética transreal é total, isto é, o resultado de qualquer uma, adição, subtração, multiplicação e divisão, entre números transreais é um número transreal. Em particular, a divisão por zero é permitida. Anderson define $\frac{-1}{0} = -\infty$, $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{0}{0} = \Phi$ (ANDERSON, 2005). Uma imagem da reta transreal pode ser dada como a que segue abaixo.

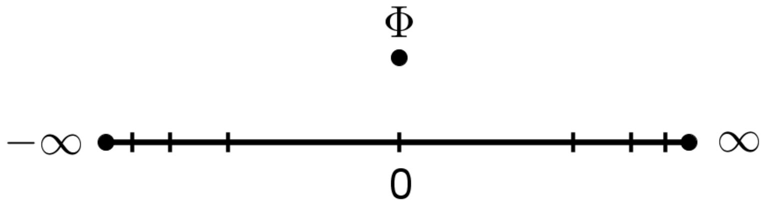

Figura 1 - Reta transreal

Os números transreais surgiram motivados na computação. Os computadores atuais têm uma limitação de processamento, a saber, as exceções aritméticas que ocorrem quando da divisão por zero. Fornecer detecção e processamento a tais exceções causa um gasto excessivo de memória, espaço no processador, tempo de processamento e energia elétrica e desperdiça o tempo do programador em antecipar e lidar com os erros. Um novo computador que não tem exceções tem sido desenvolvido por Anderson com base nos números transreais (ANDERSON, 1997, 2005). A primeira menção à divisão por zero foi inspirada na geometria projetiva (ANDERSON, 1997). Desde então diversos trabalhos foram produzidos no desenvolvimento dos números transreais. Em 2002, Anderson considera o uso sintático das regras de operações entre frações, ainda que, com o denominador zero. Em 2006, Anderson propõe o conjunto dos números transracionais, $\mathbb{Q}^{T} := \mathbb{Q} \cup \left\{\frac{-1}{0}, \frac{1}{0}, \frac{0}{0}\right\}$. Um tempo depois, é apresentada uma lista de axiomas que estabelecem o conjunto e a aritmética dos números transreais (ANDERSON, VÖLKER e ADAMS, 2007). Em 2007, Anderson estende as funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais aos números transreais e, em 2008, ele propõe uma topologia para o espaço transreal e estabelece o conceito de transmétrica. Reis, Gomide e Kubrusly (2013) fazem uma analogia do momento pelo qual passam os números transreais com momentos históricos de diversas outras categorias de números. Ainda, em 2013, Gomide e Reis fazem um estudo das motivações de Anderson na concepção dos transreais e comparam os números transfinitos de Cantor aos transreais, afirmando que estes últimos possibilitam a extensão do conceito de métrica às distâncias infinitas e indeterminadas. Ainda, Anderson e Gomide (2014) propõem uma aritmetização de uma lógica paraconsistente utilizando os números transreais. Anderson e Reis (2014) estabelecem os conceitos de limite e continuidade no espaço transreal. Reis e Anderson (2014a) ensaiam os conceitos de derivada e integral no espaço transreal. Este trabalho ganhou o prêmio de melhor artigo da International Conference on Computer Science and Applications 2014. Ainda, Reis e Anderson (2014b) propõem o conjunto dos números transcomplexos fazendo uma construção deste a partir dos números complexos. Ainda, Reis (2014) ensaia uma interpretação contextual para as operações aritméticas entre os transreais. Reis e Anderson (2015a) continuam o desenvolvimento do cálculo transreal estendendo a derivada e a integral real ao domínio transreal. Além disso, Reis e Anderson (2015b) estendem todas as funções elementares aos números transreais. Gomide, Reis e Anderson (2015) propõem uma aplicação dos transreais à lógica estabelecendo uma tradução, no conjunto dos números transreais, dos valores lógicos das proposições. Desta forma, uma semântica total é criada, isto é, uma semântica que abarca os valores lógicos clássicos, *fuzzy*, de contradição e de indeterminação. Estabelecem, ainda, o espaço lógico, conceito inspirado em Wittgenstein. Wittgenstein não definiu de forma precisa seu espaço lógico, entretanto seguindo a ideia intuitiva de que os elementos deste espaço são as proposições e que as interações entre elas são os conectivos, os autores estabelecem o espaço lógico como uma estrutura matemática bem definida. Um espaço transcartesiano onde os eixos são mundos possíveis, as entradas das coordenadas são números transreais e os pontos são proposições. Definem neste espaço transformações lógicas e um critério pra distinguir quando uma proposição é ou não clássica. Além dos textos acima mencionados, a transmatemática foi o tema de tese de doutorado de Reis orientado por Kubrusly (REIS, 2015).

2. Interpretação contextual dos números transreais

É possível que Anderson tenha tido a ideia dos transreais ao ousar aplicar as regras de operações entre frações usuais a frações que permitem denominador zero. Obviamente, qualquer um preocupado com o rigor diria: Mas uma fração com denominador zero não tem qualquer sentido! Frações se operam nos números reais ou complexos e, nestes conjuntos, um símbolo do tipo $\frac{x}{0}$ tem nenhum significado. Não é um número. É nada! É não-ser! Entretanto, Anderson simplesmente se aventurou em aplicar as regras usuais, a frações que permitem denominador zero, de forma sintática, isto é, abdicando de qualquer significado e, até mesmo, de qualquer definição para um objeto do tipo $\frac{x}{0}$.

Ora, sabemos que: *duas frações entre números reais* $\frac{x}{y}$ *e* $\frac{w}{z}$*, onde* $y, z > 0$*, são equivalentes, isto é,* $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ *se, e só se, existe um número real* $\alpha > 0$ *tal que* $x = \alpha w$ *e* $y = \alpha z$ (a restrição $y, z > 0$ não tira a generalidade da questão, pois qualquer fração pode ser reescrita como uma fração equivalente de denominador positivo). Se aplicarmos esta mesma regra trocando $y, z > 0$ por $y, z \geq 0$, isto

Synesis, v. 7, n. 1, p. 139-154, jan/jun. 2015, ISSN 1984-6754

é, *duas frações entre números reais* $\frac{x}{y}$ *e* $\frac{w}{z}$*, onde* $y, z \geq 0$*, são equivalentesse, e só se, existe um número real* $\alpha > 0$ *tal que* $x = \alpha w$ *e* $y = \alpha z$, obtemos $\frac{x}{0} = \frac{-1}{0}$ para todo número real $x < 0$, $\frac{x}{0} = \frac{1}{0}$ para todo número real $x > 0$ e $\frac{x}{0} = \frac{0}{0}$ para todo número real $x = 0$. Assim, para permitirmos, sintaticamente, frações com denominador zero, precisamos apenas de mais três elementos além dos números reais, a saber: $\frac{-1}{0}$, $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$. Anderson denotou $\frac{-1}{0} =: -\infty$, $\frac{1}{0} =: \infty$ e $\frac{0}{0} =: \Phi$. As notações $\frac{-1}{0} =: -\infty$ e $\frac{1}{0} =: \infty$ foram motivadas provavelmente nos limites $\lim_{y \to 0^+} \frac{-1}{y} = -\infty$ e $\lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} = \infty$. Continuando. Se aplicarmos as regras

$$\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \begin{cases} \frac{2x}{y}, & \frac{x}{y} = \frac{w}{z} \\ \frac{xz+wy}{yz}, & \frac{x}{y} \neq \frac{w}{z} \end{cases},$$

$$\frac{x}{y} - \frac{w}{z} = \frac{x}{y} + \frac{-w}{z},$$

$$\frac{x}{y} \times \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz} \text{ e}$$

$$\frac{x}{y} \div \frac{w}{z} = \begin{cases} \frac{x}{y} \times \frac{z}{w}, & w \geq 0 \\ \frac{x}{y} \times \frac{-z}{-w}, & w < 0 \end{cases},$$

análogas às regras das operações aritméticas entre frações usuais, às frações que permitem denominador zero, obtemos exatamente a aritmética axiomatizada por Anderson. Para não ficar extenso, tomaremos como exemplo apenas a adição por ∞. No que segue, x denota um número real arbitrário:

$$\infty + x = \frac{1}{0} + \frac{x}{1} = \frac{1\times1 + x\times0}{0\times1} = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\infty + (-\infty) = \frac{1}{0} + \frac{-1}{0} = \frac{1\times0 + (-1)\times0}{0\times0} = \frac{0}{0} = \Phi,$$

$$\infty + \infty = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \frac{2\times1}{0} = \frac{2}{0} = \frac{1}{0} = \infty \text{ e}$$

$$\infty + \Phi = \frac{1}{0} + \frac{0}{0} = \frac{1\times0 + 0\times0}{0\times0} = \frac{0}{0} = \Phi.$$

Em (ANDERSON, VÖLKER e ADAMS, 2007), os axiomas A4, A5 e A11 afirmam que $\infty + x = \infty$, $\infty + (-\infty) = \Phi$, $\infty + \infty = \infty$ e $\infty + \Phi = \Phi$.

Com o uso sintático das regras usuais de frações, Anderson concebeu os transreais. Salientamos que do ponto de vista conceitual, Anderson não define a divisão por zero e nem o que é um número transreal. Entretanto, ele obteve sucesso em se inspirar na aritmética das frações para estabelecer o conjunto dos números transreais por meio axiomático. É claro que, como em qualquer teoria proposta por meio de axiomas ou de postulados, cabe a discussão epistemológica sobre se são ou não aceitáveis tais axiomas. Isto é, os números transreais estão postos via axiomas, mas são estes números entes estritamente abstratos? Sem qualquer significado ou interpretação? Pode algum sentido ter a divisão por zero? Decerto, não se pode dar à divisão por zero o mesmo significado que divisão por números não nulos. Entretanto, isto não quer dizer que não se possa dar à divisão por zero um significado mais amplo que englobe o significado da divisão pelos demais números. Este é um processo comum na matemática.

A interpretação das operações aritméticas muda a cada vez que o conjunto numérico é estendido. Por exemplo, a multiplicação $2 \times 3 = 6$ pode ser interpretada por dizer que 6 é a quantidade de elementos de um conjunto oriundo da união disjunta de 2 conjuntos cada um contendo 3 elementos. Tal significado não pode ser dado à multiplicação $\sqrt{2} \times \pi = \sqrt{2}\pi$. Entretanto, podemos interpretar esta operação por dizer que $\sqrt{2}\pi$ é o vetor obtido pela homotetia, neste caso ampliação, de fator $\sqrt{2}$ do vetor π. Esta mesma interpretação cabe à multiplicação anterior, isto é, podemos dizer que 6 é o vetor obtido pela homotetia de fator 2 do vetor 3. Contudo esta explicação não pode ser dada à multiplicação $i \times 2i = -2$. Ainda assim, podemos dizer que -2 é o vetor, no plano bidimensional, obtido pela homotetia de fator $|i|$ e rotação pelo ângulo $\mathrm{Arg}(i)$ do vetor $2i$. E esta mesma interpretação cabe aos dois casos anteriores. Com estes exemplos, percebemos que a ampliação do significado de um objeto matemático não é uma novidade.

E sobre as operações entre números transreais? Ora, números reais são interpretados como vetores na reta orientada. Podemos interpretar, também, cada número transreal como um vetor. O ∞ como um vetor orientado positivamente cujo "tamanho" (módulo) é maior que o tamanho de qualquer vetor real. Não necessariamente, ∞ tem um tamanho fixo. Podemos olhar para o tamanho deste vetor como sendo análogo à localização de um elétron em seu orbital. Isto é, a cada momento que ∞ é operado, ele possui algum tamanho, que certamente é maior que o tamanho de qualquer vetor real, mas não necessariamente é o mesmo tamanho de um instante anterior. Enfatizamos que não estamos interpretando o ∞ como diversos vetores, isto é, um vetor indeterminado. Ao invés disso, ∞ é um vetor determinado, único, porém com tamanho variável. Analogamente, interpretamos $-\infty$ como um vetor orientado negativamente cujo tamanho é maior que o tamanho de qualquer vetor real. Semelhantemente, o Φ pode ser entendido como um vetor cujo tamanho assume um valor a cada vez que é operado, mas diferente de ∞, o tamanho de Φ não tem a restrição de ser maior que qualquer número real. O número Φ é único, definido e determinado, porém seu tamanho, como vetor, é um a cada momento em que Φ opera. Além disso, entendemos que Φ não revela informação sobre seu tamanho. Isto é, a cada instante que Φ é operado ele possui um determinado tamanho que, entretanto, é desconhecido. Desta forma, se $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então a adição $x + \infty$ pode ser interpretada como a translação de x por ∞. Assim, se $x \in \mathbb{R}$, então x tem tamanho finito, daí, $x + \infty$ tem algum tamanho maior que qualquer número real donde $x + \infty = \infty$. A adição $\infty + (-\infty)$ pode ser interpretada como a translação de um vetor de orientação positiva de tamanho desconhecido maior que qualquer número real por um vetor de orientação negativa de tamanho desconhecido maior que qualquer número real (não necessariamente igual ao do vetor positivo). Assim $\infty + (-\infty)$ tem tamanho completamente desconhecido. Por isso $\infty + (-\infty) = \Phi$. A esta altura o leitor já pode deduzir a interpretação para $\infty + \Phi = \Phi$ e para as demais operações de adição e multiplicação. Nos números reais a divisão também não possui uma interpretação vetorial. A não ser a de que divisão é o inverso da multiplicação. Isto é, se $x, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$, então $x \div y = x \times y^{-1}$. Isto pode ser reescrito por $x \div y = \frac{x}{1} \div \frac{y}{1} = \frac{x}{1} \times \frac{1}{y}$. Isto é, "divisão por" é a "multiplicação pelo recíproco de". E o recíproco pode ser tomado em frações de numerador zero, entendendo recíproco como meramente a inversão de papéis de numerador e denominador. Assim, divisão por zero é a multiplicação por $\frac{1}{0}$.

3. A proposta de divisão por zero não veio de dentro da matemática

É interessante notar que a ideia de divisão por zero surgiu de um não matemático. Anderson é cientista da computação e propôs os transreais a fim de evitar o travamento do computador. Podemos conjecturar dois motivos para o fato de a proposta de divisão por zero ter vindo não de dentro da matemática. O primeiro é que os matemáticos não viram na falta de divisão por zero um problema, pois nunca tiveram necessidade dela. Na computação, a divisão por zero é um problema que se apresenta. Na matemática, o problema não se apresenta. A matemática já estabeleceu que a divisão por zero é não definida, é impossível. Por isso, todos os sistemas matemáticos já estão preparados para não operarem tal divisão. Quando aparece uma divisão por zero, o sistema diz: Isso não! A divisão por zero é um indício, nos modelos físicos que usam a matemática, de uma singularidade, de algo que relaciona uma quantidade infinita a uma quantidade nula. Essa relação entre o infinito e o nada não pode ser concretizada na natureza. Então a matemática tem um alerta contra singularidades. Que é a proibição à divisão por zero. Na computação, a divisão por zero é um problema. E como tal, os problemas exigem solução. E na matemática não é um problema. É um problema ocultado, por isso, não mais problema. É aquilo sobre o qual não se pode falar. É um tabu! "Colocamos uma pedra em cima disso!". A divisão por zero é um tabu que não pode, ou não quer ser resolvido. Os números transreais, que introduzem divisão por zero dentro do corpo teórico matemático, de alguma forma, trazem desconforto. Todo sistema que se estrutura necessita de uma proibição. Não apenas no âmbito científico acadêmico. Não precisa-se de muitas, com uma única proibição o sistema se estrutura. É preciso de uma lei, caso contrário o caos domina. E não é um caos determinista. É um caos grego, um caos inicial. Um caos sem solução. Um caos que não gera ordem. A proibição matemática é: não se pode dividir por zero. Claro que a matemática possui diversos postulados, mas a proibição à divisão por zero é a proibição padrão. Uma teoria que propõe uma divisão por zero desestabiliza o sistema. O zero é o conversador numérico do vazio. E isso é apavorante ao homem. O homem acha que qualquer descontinuidade é a morte que o vem buscar. Então, ele não gosta de nada que faça com que ele converse consigo mesmo. Que é uma conversa com sua própria morte. O homem não tolera vácuo. Não tolera vazio. Ao olharmos a história da ciência, o vácuo sempre foi proibido. E ainda o é com a matéria escura. Não suporta-se não haver nada. Não suporta-se o zero. O zero como símbolo da ausência é insuportável. E zero sobre zero é um duplo insuportável. Porque o que se vê é o zero barrado por ele mesmo. A divisão denotada pelo sobre. O sobre como uma barra, como um impedimento de existência. É o zero impedido por si!

Um segundo motivo para a divisão por zero não ter vindo de dentro da matemática é o próprio engessamento da prática. Em geral, um bom matemático conhece muito bem as regras do jogo que pratica. E, assim, está mergulhado nelas. O que o dificulta, ou até impede, de elucubrar sobre algo fora do comum. Pessoas não educadas na matemática podem falar absurdos quando falam matemática, entretanto, algumas vezes esses absurdos abrem espaço para se pensar algo fora do comum. E talvez o que era absurdo pode dar origem a um objeto matemático bem definido e estruturado.

4. O infinito

Uma das características dos transreais é a adjunção do infinito ao corpo dos números reais. Obviamente, o infinito não é uma novidade na matemática. Entretanto, observamos uma clara diferença no tratamento que os transreais dão ao infinito comparado a tratamentos já existentes na matemática. A primeira abordagem sistemática do infinito se dá no âmbito conjuntista. Na abordagem de Cantor o infinito aparece como cardinalidade de conjuntos. É interessante notar o que diz Tatiana Roque:

Além de ser tida como o ápice da busca pelo rigor que marcou o século XIX, a teoria dos conjuntos é associada à admissão, no interior da matemática, de ideias complexas, como a de infinito, antes renegadas ou entregues a especulações filosóficas. Na última metade do século XIX, Cantor teria introduzido o infinito na matemática, um dos ingredientes principais para o florescimento espetacular da matemática moderna. Na narrativa tradicional, a repulsa ao infinito, o *horror infiniti*, teria reinado entre os matemáticos desde os gregos, impedindo os avanços dessa ciência, até que Cantor venceu todas as barreiras e logrou fazer com que o infinito fosse, finalmente, aceito (ROQUE, 2012).

O infinito, ou melhor dizendo, os infinitos de Cantor surgem como cardinalidade de conjuntos, não como extensões de números reais. Isto é, diferentemente dos infinitos transreais, os infinitos de Cantor não surgem como números que podem operar aritmeticamente com qualquer número real.

Um entendimento, intimamente ligado aos infinitos cantorianos, é o de infinito potencial. Isto é, de infinito como algo que pode ser indefinidamente aumentado ou estendido. Por exemplo, a sucessão de números naturais $1, 2, 3, \dots$ é infinita pois pode-se tomar, indefinidamente, um elemento após o último tomado. Relacionado ao infinito potencial está o conceito de limite divergente ao infinito. Quando, na análise matemática, diz-se que $\lim f(x) = \infty$, significa-se que a função f assume valores tão grandes quanto se queira. Isto é, pode-se aumentar, indefinidamente, os valores de $f(x)$. Comentário análogo pode ser feito a $\lim f(x) = -\infty$. Estes dois símbolos, $-\infty$ e ∞, são adjuntados aos números reais formando os reais estendidos. Onde permite-se a extensão contínua de funções que divergem a um dos infinitos. Entretanto esta adjunção se dá no âmbito topológico, não no aritmético. Nos reais estendidos, os símbolos $-\infty$ e ∞ (chamados símbolos, pois nem os que com eles trabalham os consideram números), diferentemente de nos transreais, não operam aritmeticamente com os números reais e não são gerados por divisão por zero. Alguns livros de medida e integração definem nos reais estendidos o que é conveniente. Definem a relação de ordem, definem soma de infinito com infinito, multiplicação de infinito com infinito, mas não definem, por exemplo, infinito menos infinito, zero dividido por zero ou infinito dividido por zero. A maioria destes exemplos são indeterminações clássicas. Surge o infinito e define-se as operações aritméticas que não geram problema, isto é, aquelas que não falham as regras aritméticas usuais, como por exemplo, comutatividade, associatividade e distributividade. As operações aritméticas que gerariam falhas nas regras usuais não são definidas.

Os números hiperreais, que começaram com os infinitesimais de Leibniz, e depois foram estabelecidos por Robinson, de certa forma, também tratam de números infinitos. Os hiperreais possuem números infinitamente pequenos e infinitamente grandes, mas não o infinito absoluto, o maior número. Ou o infinito vindo da divisão por zero. Os hiperreais possuem números estritamente positivos e, ao mesmo tempo, menores que qualquer número real. Por esta propriedade, estes números são chamados de infinitesimais ou infinitamente pequenos. Os inversos multiplicativos destes números são maiores que qualquer número real, por isso, são chamados de infinitos ou de infinitamente grandes. Apesar de, nos hiperreais, estes números possuírem algum sentido de infinito, eles não são, diferentemente de nos transreais, oriundos do processo de divisão por zero.

Pensando como matemático, o infinito como número é um horror. O infinito é a ponte que liga os números à filosofia, à humanidade. O infinito é do homem e não do sistema numérico. No momento em que o infinito é introduzido ao sistema numérico, surgem dois horrores possíveis. Ou o homem é número ou o número é humanizado. E essas duas coisas são horríveis porque são completamente fora de nossa zona de conforto. Nós os humanos, sentimos, gostamos de poesia e fazemos matemática. E os números que não são nada, não são entes, não podem ser infinitos porque de alguma maneira ao número não é permitida a transcendência, a religiosidade que o infinito clama. O infinito tem sempre um deus por detrás. É deus que é infinito. Por isso que é um horror matemático. No fundo, o horror da ciência é perceber que as religiões e a ciência estão muito mais interligadas do que se percebe, do que se quer. Que arte, religião, filosofia e ciência é uma única coisa. Esse é um grande horror. Um número infinito leva a isso. Este horror é inerente ao ser humano. Isto é a incompletude humana, talvez. É o que leva à intolerância com certos tabus. O infinito como número é um tabu difícil de ser vencido. O entendimento de infinito como número agrega complexidade ao sistema, refaz o conceito, tanto de número, quanto de homem.

Toda criança sabe que um positivo dividido por zero dá infinito e um negativo dividido por zero dá menos infinito. Porque o zero, quando no denominador, é amigo do numerador. Dificilmente pensa-se que pode ser um zero negativado. Um zero que tenha uma memória negativa. Ganha-se o pensamento de que o zero pode ser negativado ou positivado depois que estuda-se limites. O zero é neutro e ele segue a positividade ou a negatividade do numerador. Dividir por meio dá o dobro que dividir por um. Dividir por um quarto dá o dobro que dividir por meio e assim sucessivamente. Logo, é claro que dividir por zero dá infinito. Isso toda criança sabe, depois é que desaprende. Depois é que se proibi. E proíbe-se, pois considera-se que o zero pode ser negativado ou positivado. Logo a divisão de um por zero poderia dar menos infinito, caso o zero fosse negativado, ou poderia dar mais infinito, caso o zero fosse positivado. Como algo poderia dar dois resultados tão distantes? Na verdade, mais e menos infinito são nomes da mesma coisa. O ser é múltiplo. É um ser divinizado. Feminino e masculino, positivo e negativo simultaneamente. Esse é o infinito.

Para muitos, o zero é um símbolo do nada, uma vez que, quando os números inteiros são vistos como ferramentas de contagem, o zero representa nenhuma quantidade. A cultura ocidental, com influência de Parmênides, pensa dicotomicamente. Ou algo é ou não é. Existem apenas o ser e o não-ser. Desta forma o zero seria o não-ser. No entanto, longe do alcance parmenidiano, o não-ser é uma forma de existência diferente do nada. Na tradição semita, o não-ser também é. O não-ser pode ou não se manifestar. Quando se manifesta, é um ente e, quando não se manifesta, será o nada que se fará notar pela ausência, até que se manifeste dando origem ao ser (BARBOSA e KUBRUSLY, 2011). O número infinito, por sua vez, pode ser visto como o cardinal de um conjunto não-finito. E o infinito transreal, que pela relação de ordem é maior que qualquer número transreal ordenável, seria então o cardinal de um conjunto universal, o conjunto que contém todas as coisas. Desta forma, o infinito é visto como o símbolo do tudo. Na aritmética transreal, o número infinito é obtido através de uma transformação aritmética a partir do zero. Tomando-se o recíproco do zero, obtém o infinito. Isto é, o zero gera o infinito. Metaforicamente, podemos dizer que o nada gera o tudo.

5. O nullity

O *nullity* é um número de propriedades bastante diferentes dos demais transreais. O menos infinito e o infinito, apesar de não serem números reais, já são conhecidos no cálculo e na teoria de medida e integração. O *nullity*, por sua vez, o zero sobre zero, é completamente novo. Zero dividido por zero é indefinido na aritmética real, mas diferente de infinito, zero sobre zero não é resultado de qualquer limite no cálculo. Quando, no quociente entre duas funções, o numerador tende a zero e o denominador também tende a zero, temos o que é chamado de indeterminação. Isto é, para qualquer número real, existem quocientes entre funções tais que o numerador tende a zero, o denominador também tende a zero, mas o limite deste quociente é igual ao número real dado. Desta forma, a teoria dos limites não dá pistas de como definir a aritmética do *nullity*. Além disso, este número transreal acumula algumas propriedades um tanto quanto extravagantes, como ser não-ordenado, isto é, *nullity* não é maior ou menor que qualquer número transreal, e absorvente, ou seja, qualquer operação aritmética com *nullity* resulta em *nullity*. *Nullity* é de certa forma paradoxal. Em qualquer outra aritmética, zero dividido por zero não é nada, é indefinido, não pertence ao universo de estudo. Mas nos transreais, *nullity* é um número determinado, bem definido. *Nullity* é um número tanto quanto o é o zero, o um ou o *pi*.

Topologicamente falando, o *nullity* é um ponto isolado. O *nullity* é como algo que explodiu, porque não cabia mais. É como fazer um pirão. Mexe-se, mexe-se e, de repente, ele começa a espocar. Se continua-se mexendo, vão aparecendo bolhas e elas podem espocar e fazer aparecer um ponto de pirão no teto. Aquele ponto do teto é pirão e não é pirão. É pirão porque veio do pirão e não é pirão porque está fora. Ele é fruto de uma emergência ortogonalizante. É como rodar-se numa espiral e entender o mundo numa vertical que não faz parte do plano da espiral. O *nullity* está fora por emergência. Ele surge por emergência. O *nullity* é algo que aparentemente deu errado no preparo do pirão, mas que era inevitável. Na verdade, ele deu certo! O *nullity* nasce na inexorabilidade do pirão. A inexorabilidade do pirão gera o *nullity*. É como quando se está trabalhando num lugar de conforto e o inesperado aparece inesperadamente. O inesperado não é a morte que contamos com ela desde que nascemos. O inesperado é aquilo que nem a morte consegue ser. É o *nullity*.

Por a matemática ser da mente humana, ela tem uma semelhança muito grande com as artes. Assim como o principal nas artes é a conversa com o que transcende, a matemática precisa seguir este mesmo caminho. Com os transreais, na verdade antes, desde os hiperreais de Robinson, desde Cantor, desde o entendimento dos reais como *continuum* esta conversa vem se aprimorando. Se transcendentalizando. Quando percebe-se a possibilidade de ser diferente do que é, já se está radicalmente diferente do que era. Este é o trabalho do artista. Quando o artista intui sua obra, a obra já está em construção. Existe uma distância infinita entre a zona de conforto em que estamos e as possibilidades que ainda não sabemos, mas quando suspeitamos de uma destas possibilidades, já percorremos esta distancia infinita e o resto é finito novamente até a construção do mundo com estas novas possibilidades. A matemática é poesia desencarnada. Se desencarnarmos um poema, o que surge é uma matemática. Então a matemática é um esqueleto de poesia. E o *nullity* é a descoberta de um ser novo. De um ser novo potencialmente poético. Há de criar-se uma nova palavra: *nullity*. Que entrará em um poema e depois noutro. E de repente ela é uma palavra poética que está habitando os poemas do mundo. E as mutações desta palavra: os hipernullitys, os quase-nullitys, os nullitys do bem, os nullitys do mal, as guerras de *nullity*, amores de *nullity*, paixões de *nullity*.

Synesis, v. 7, n. 1, p. 139-154, jan/jun. 2015, ISSN 1984-6754

Referências Bibliográficas

ANDERSON, J. A. D. W. Representing geometrical knowledge. **Philosophical Transactions of the Royal Society B**, v. 352, p. 1129-1140, 1997.

______. Exact numerical computation of the rational general linear transformations. **Vision Geometry XI Proceedings of the SPIE**, v. 4794, p. 22-28, 2002. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/SPIE.2002.Exact.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Perspex machine II: Visualisation. **Vision Geometry XIII Proceedings of the SPIE**, v. 5675, p. 100-111, 2005. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineII.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Perspex machine VII: The universal perspex machine. **Vision Geometry XIV Proceedings of the SPIE**, v. 6066, p. 1-17, 2006. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineVII.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Perspex machine IX: Transreal analysis. **Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE**, v. 6499, p. 1-12, 2007. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineIX.pdf > Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Perspex machine XI: Topology of the transreal numbers. In: INTERNATIONAL MULTICONFERENCE OF ENGINEERS AND COMPUTER SCIENTISTS, 2008. Hong Kong. **Anais**... International Association of Engineers, 2008. p. 330-338. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineXI.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Trans-floating-point arithmetic removes nine quadrillion redundancies from 64-bit IEEE 754 floating-point arithmetic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. **Anais**... International Association of Engineers, 2014, p. 80-85. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp80-85.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W.; GOMIDE, W. Transreal arithmetic as a consistent basis for paraconsistent logics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. **Anais**... International Association of Engineers, 2014. p. 103-108. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp103-108.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W.; REIS, T. S. dos. Transreal limits expose category errors in IEEE 754 floating-point arithmetic and in mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. **Anais**... International Association of Engineers, 2014. p. 86-91. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp86-91.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ANDERSON, J. A. D. W.; VÖLKER, N.; ADAMS A. A. Perspex Machine VIII: Axioms of transreal arithmetic. **Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE**, v. 6499, p. 649903.1-649903.12, 2007. Disponível em <http://bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineVIII.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

BARBOSA, C. P. M.; KUBRUSLY, R. S. Decifrando o zero. In: SCIENTIARUM HISTÓRIA: IV CONGRESSO DE HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS, DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA, 2011. Rio de Janeiro. **Anais**... Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. Disponível em <http://www.hcte.ufrj.br/downloads/sh/sh4/LIVRO%20DE%20ANAIS%20IV%20(pr%C3%A9-textual)%20com%20p%C3%B4steres.pdf> Acesso em 03 de agosto de 2015.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos. Números Transreais: Sobre a Noção de Distância. **Synesis**, v. 5, n. 2, p. 197-210, 2013. Disponível em <http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&page=article&op=view&path[]=413&path[]=241> Acesso em 02 de junho de 2015.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Logical Space of All Propositions. In: Haeng Kon Kim; Mahyar A. Amouzegar; Sio-long Ao. (Org.). **Transactions on Engineering Technologies, World Congress on Engineering and Computer Science 2014**. London: Springer, 2015, p. 227-242.

REIS, T. S. dos. Números transreais: matemática ou devaneio? In: 14º SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 2014. Belo Horizonte. **Anais**... Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2014. Disponível em <www.14snhct.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1899> Acesso em 02 de junho de 2015.

REIS, T. S. dos. **Transmatemática**. 2015. 124 f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transdifferential and transintegral calculus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND

APPLICATIONS, 2014a. San Francisco. **Anais**... International Association of Engineers, 2014. p. 92-96. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp92-96.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Construction of the transcomplex numbers from the complex numbers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014b. San Francisco. **Anais**... International Association of Engineers, 2014 p. 97-102. Disponível em <http://www.iaeng.org/publication/WCECS2014/WCECS2014_pp97-102.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Transreal Calculus. **IAENG International Journal of Applied Mathematics**, v. 45, n. 1, p. 51-63, 2015a. Disponível em <http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v45/issue_1/IJAM_45_1_06.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

______. Transreal Limits and Elementary Functions. In: Haeng Kon Kim; Mahyar A. Amouzegar; Sio-long Ao. (Org.). **Transactions on Engineering Technologies, World Congress on Engineering and Computer Science 2014**. London: Springer, 2015b, p. 209-225.

REIS, T. S. dos; GOMIDE, W; KUBRUSLY, R. S. Números transreais: mais uma etapa na história dos números. In: SCIENTIARUM HISTÓRIA: VI CONGRESSO DE HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS, DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA, 2013. Rio de Janeiro. **Anais**... Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013. Disponível em <http://www.hcte.ufrj.br/downloads/sh/sh6/SHVI/trabalhos%20orais%20completos/trabalho_081.pdf> Acesso em 02 de junho de 2015.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Universidade Católica de Petrópolis
Centro de Teologia e Humanidades
Rua Benjamin Constant, 213 – Centro – Petrópolis
Tel: (24) 2244-4000
synesis@ucp.br
http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis

REIS, Tiago Soares dos; KUBRUSLY, Ricardo Silva. DIVISÃO POR ZERO E O DESENVOLVIMENTO DOS NÚMEROS TRANSREAIS. Synesis, v. 7, n. 1, p. 139-154, 2015. ISSN 1984-6754. Disponível em: http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&pag e=article&op=view&path%5B%5D=733. Acesso em: 30 Jul. 2015