Synesis, v. 5, n. 2, p. 197-210, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754

NÚMEROS TRANSREAIS: SOBRE A NOÇÃO DE DISTÂNCIA

TRANSREAL NUMBERS: ON THE CONCEPT OF DISTANCE*

WALTER GOMIDE**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO, BRASIL

TIAGO S. DOS REIS***
INSTITUTO FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, BRASIL

Resumo: o conceito de distância é de fundamental importância para a Ciência. Basicamente, uma vez traduzida para a matemática, a noção de distância se define como uma função cujos argumentos são pares de números reais e os valores são números reais. Tal concepção de distância (o espaço métrico) está presente em todas as áreas da física, e tem por fundamento a ideia intuitiva de que a distância entre dois pontos é o tamanho de um caminho contínuo entre tais pontos. Este artigo apresenta um novo conceito de distância, conceito este baseado nos números transreais, criados pelo cientista da computação James A.D.W. Anderson. Esta nova concepção de espaço métrico (o espaço transmétrico) permite a introdução de distâncias infinitas, assim como distâncias entre pontos entre os quais não há caminho contínuo algum (metaforicamente, uma distância cuja imagem é o "salto").

Palavras-chave: Números reais; números transreais; infinito; métrica; transmétrica.

Abstract: The concept of distance has a main importance to Science. Basically, if one can translate such notion into mathematics, the concept of distance is defined by a function whose arguments are pairs of real numbers and values are real numbers. Such conception of distance (metric space) is present in every realm of Physics, and finds its foundation on the intuitive idea that the distance between two points is the size of a continuous path that links these points. This article presents a new concept of distance, which one is built upon transreal numbers, a new domain of numbers created by the english computer scientist James A.D.W. Anderson. This new conception of metric space (transmetric space) allows the introduction of infinite distances, as well as distances between points which there is not any continuous path (metaphorically, a distance whose image is the "jump").

Keywords: Real numbers; transreal numbers; infinity; metric; transmetric.

---

* Artigo recebido em 31/05/2013 e aprovado para publicação pelo Conselho Editorial em 01/06/2013.

** Doutor em Filosofia pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. Professor da Universidade Federal do Mato Grosso, Brasil. Currículo lattes: http://lattes.cnpq.br/8311495246895647. E-mail: waltergomide@yahoo.com.

*** Doutorando em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, IFRJ, Brasil. Currículo lattes: http://lattes.cnpq.br/7858280277437268. E-mail: tiago.reis@ifrj.edu.br.

1. Introdução

O conceito de distância é um dos mais fundamentais da ciência, em especial na física. Em contextos de medição, a distância (assim como qualquer outra grandeza física) vem, usualmente, expressa por um número real. Só por isto, a ideia intuitiva de que pode haver distâncias infinitas entre objetos está excluída de qualquer processo de medição, posto que não há números reais infinitos. De fato, em geral, o tratamento sistemático que o infinito recebeu na matemática está associado a concepções conjuntísticas, as quais não se inserem, como postulado fundamental de suas análises, que existem distâncias entre os elementos do conjunto.

2. Cantor e o Tratamento Conjuntista do Infinito

Como exemplo paradigmático do infinito tratado como conjunto (tratamento este que exclui a possibilidade de falarmos em "distâncias" infinitas), está a abordagem pioneira de Georg Cantor. Ao final do século XIX, o matemático russo, de formação alemã, Georg Cantor publicou dois artigos que são considerados precursores da teoria dos conjuntos[1]. Tais trabalhos constituem uma síntese de resultados e conceitos que Cantor, desde a sétima década dos oitocentos, já desenvolvera em trabalhos sobre a expansão trigonométrica de funções reais, e sobre as propriedades topológicas do *continuum*. Em grandes linhas, podemos afirmar que Cantor introduziu o que hoje é chamada de "teoria ingênua de conjuntos" a partir da necessidade de entender as propriedades estruturais do contínuo numérico: o pano de fundo das construções conjuntísticas de Cantor é a tentativa de analisar detidamente quais as propriedades estruturais dos números reais. Na pesquisa de Cantor, a noção de infinito é um objeto precípuo da teoria conjuntística: definir de forma satisfatória a noção de infinito, a partir da noção de conjunto, é uma das tarefas a que se propõe Cantor em seus artigos supracitados (ver nota 1).

Mas não é só a definição de infinito que, a partir de conjuntos, encontra lugar na obra de Cantor. A distinção entre enumerável e não-enumerável também é apresentada por Cantor em termos estritamente conjuntísticos. Tal distinção tem sua origem na comparação que Cantor faz entre os números naturais e os pontos de um segmento de reta. Cantor, em 1874, mostrara que há mais pontos em um segmento de reta do que números na sequência dos números naturais[2].

[1] Os artigos aqui mencionados apareceram em 1895 e 1897, no *Mathematische Annalen*, sob o título de "Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre" (ver JOURDAIN, in CANTOR, [1941]).
[2] Ver Cantor, "Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellenn algebraischen Zahlen", [1874].

Com este resultado, Cantor é levado a chamar os conjuntos que têm o mesmo "tamanho" dos naturais de enumerável, enquanto os conjuntos "maiores" que os naturais são denominados de "não-enumeráveis".

De fato, a teoria cantoriana nos oferece um quadro conceitual em que o infinito é abordado sobre diversos aspectos. Neste quadro, destacam-se as noções de *tipo ordinal* e de *número cardinal*. Para chegar a tais conceitos, Cantor se utiliza da *faculdade humana da abstração* (CANTOR, §1, [1895]). Primeiramente, Cantor considera um conjunto como *um agregado de objetos perfeitamente intuídos pelo pensamento e distintos entre si.* Neste agregado, podemos abstrair a natureza dos elementos constitutivos, retendo a *inter-relação entre seus elementos*. Esta inter-relação entre os elementos de um agregado nos dá a *ordem configuracional* do agregado; a esta ordem, Cantor deu o nome de *tipo ordinal.* (CANTOR,§7, *op.cit*). Vejamos um exemplo. Seja um conjunto A de números reais, definido por

$$A = \{x;\ x \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq x \leq 2\}.$$

Os elementos de A são números reais e estão dispostos de uma determinada maneira. De fato, as propriedades estruturais da ordem interna de A são as seguintes:

a) *Todo elemento de A é um ponto de acumulação de A – qualquer que seja a vizinhança de qualquer elemento de A, há infinitos elementos de A nesta vizinhança;*

b) *O conjunto A é denso nele mesmo: entre dois elementos quaisquer de A, há uma quantidade infinita de elementos de A;*

c) *Toda sequência de elementos de A que tenha limite, tem este último pertencente a A.*

Tais propriedades estruturais dão o tipo ordinal de A, tipo este que Cantor denominou de θ, o tipo ordinal do *contínuo linear* (CANTOR, §11, *op. cit*). Chega-se a θ por abstração da natureza dos elementos de A (neste caso, números reais), mantendo, no resultado desta abstração, as propriedades estruturais acima descritas. De fato, A poderia ser um conjunto de massas de átomos, de módulos de números complexos, de instantes de tempo, etc. Uma vez abstraindo a natureza de seus elementos, o resultado seria a ordem abstrata pela qual o conjunto foi estruturado em suas inter-relações posicionais, isto é, o tipo ordinal θ. Para indicar que θ surgiu de A por meio de uma abstração, Cantor usa uma notação similar a "$A^* = \theta$" (CANTOR, §7, *op.cit*).

Além do tipo ordinal, outra propriedade que se depreende dos conjuntos é seu *número cardinal* ou *potência*. A potência de um conjunto surge por uma dupla abstração: dado um agregado qualquer, chegamos ao tipo ordinal por uma primeira abstração. Podemos então abstrair a ordem inter-posicional indicativa do tipo ordinal do agregado em questão, chegando a um número que nos dá a "quantidade" de puras unidades que constituem o agregado; este número é o que Cantor chama de *cardinal* ou *potência*. Segundo Cantor:

Chamamos de "potência" ou "número cardinal" de *M* [um agregado] o conceito geral que, por meio de nossa faculdade ativa de pensamento, surge do agregado *M* quando fazemos a abstração da natureza dos vários elementos *m* [de *M*] e da ordem em que eles são dados (CANTOR, §1, *op.cit*). Aqui cabe dizer que o conceito de potência reflete a "imagem abstrata" que temos do conjunto ou agregado, sendo este último uma realidade objetiva que independe de nossa intuição (CANTOR, [1883], p.80).

No exemplo anteriormente dado, podemos abstrair de $A^* = \theta$ a ordem de seus elementos. Neste caso, o agregado resultante $A^{**} = \mathbf{c}$ é o cardinal ou potência do *contínuo linear*. A dupla superposição do símbolo * indica que a faculdade de abstração operou duas vezes sobre A para chegarmos à potência **c.**

De posse das noções de tipo ordinal e de número cardinal, Cantor pôde desenvolver uma maneira aritmética de tratar os conjuntos infinitos. De fato, uma das maiores contribuições que Cantor legou à matemática foi a aritmética transfinita, a qual tanto se aplica a tipos ordinais quanto a números cardinais. No escopo da aritmética transfinita, a distinção entre finito e infinito, fundamentada em Cantor na teoria dos conjuntos, aparece sob a forma de exceções claras de princípios ou leis aritméticas que valem irrestritamente em domínios finitos. Por exemplo, a comutatividade da adição, regra de validade inquestionável para os números finitos, não vale no âmbito do infinito ordinal, embora valha para números cardinais infinitos. Consideremos, por exemplo, um conjunto infinito e enumerável cujas relações de ordem se deem sob a forma de uma sequência (entende-se que um conjunto está dado sob a forma sequencial se, e somente se, seus elementos estão "pareados" ou em correspondência bijetiva com os números naturais). Segundo a teoria cantoriana dos conjuntos, o tipo ordinal de tal conjunto é ω, o primeiro ordinal transfinito (CANTOR, §15, [1897]). De acordo com a aritmética transfinita, para qualquer número finito k, temos que:

$$k + \omega \neq \omega + k,$$

o que constitui uma flagrante violação da comutatividade da adição.

Desejamos estender o conceito de métrica a fim de termos distâncias infinitas. Apesar de, na teoria de Cantor, o infinito não ter mais o caráter apenas intuitivo, o conjunto dos números transfinitos não se mostra adequado para representar distância, posto que, como já comentado, esta grandeza é usualmente representada por números reais. Desta forma, necessitamos de um conjunto que possua o infinito como número, mas que também possua os números reais. Como os transfinitos não são uma extensão dos reais, estes primeiros não são apropriados para estender o conceito habitual de métrica.

Formalmente, um espaço métrico consiste em um par (P, d), em que P é um conjunto de pontos, e d uma função definida em P^2 (o produto cartesiano $P \times P$), cujos valores são números reais que satisfazem os seguintes postulados:

P1) $d(x,y) = d(y,x)$.

P2) $d(x,y) \geq 0$.

P3) $d(x,y) = 0$ *se, e só se,* $x = y$

P4) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Para que o infinito tenha uma acepção métrica, é necessário que a própria noção de infinitude seja introduzida em contextos numéricos, o que não foi feito na obra original de Cantor. Este contexto é encontrado no domínio dos transreais, números criados pelo cientista da computação inglês James A.W.D. Anderson[3].

3. Anderson e a Concepção Axiomática dos Números Transreais

Inicialmente, os números reais, em sua representação linear, são estendidos com a introdução das duas constantes seguintes (ANDERSON, [2007]):

a) $1/0 = \infty$;

b) $-1/0 = -\infty$.

Desta forma, chegamos aos números reais estendidos:

c) $\mathbb{R}^E = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

[3] Sobre os transreais, ver James Anderson, *Transmathematics. How to divide by zero using only the operations of ordinary arithmetic, but ignoring the prescription not to divide by zero, in such a way as to preserve the maximum information about the magnitude and sign numbers*, IN: www.booofparagon.com/Pages/Books/htm

Synesis, v. 5, n. 2, p. 197-210, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754

A partir dos reais estendidos, os números transreais são introduzidos por meio da apresentação da constante Φ, definida como se segue (ANDERSON, *op.cit*):

d) $0/0 = \Phi$.

Finalmente, definimos os transreais $\mathbb{R}^T$ como o seguinte conjunto:

e) $\mathbb{R}^T = \mathbb{R}^E \cup \{\Phi\}$.

Os números transreais podem ser representados pictoricamente pelo diagrama abaixo:

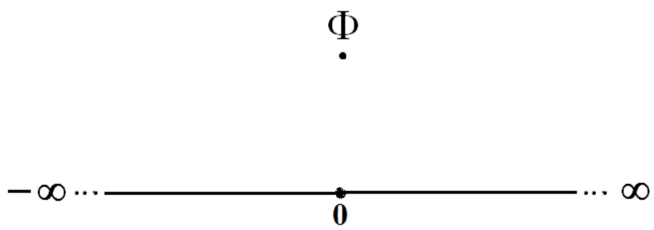

Figura 1

A constante Φ (cujo nome dado por Anderson é "nulidade") ocupa uma posição fora da reta estendida que representa o domínio dos reais estendidos $\mathbb{R}^E = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$.

No que diz respeito à relação de ordem que se estabelece nos transreais, chega-se a um interessante resultado. Para todo número real r, os seguintes enunciados sempre são o caso:

f) $r < \infty$;

g) $-\infty < r$.

Entretanto, a constante Φ não é ordenável em $\mathbb{R}^T$: para qualquer número $x \in \mathbb{R}^T$, sempre valem as seguintes proposições:

h) $\neg (x < \Phi)$;

i) $\neg (\Phi > x)$.

Metaforicamente, podemos conceber os reais estendidos como uma estrada infinita cujos caminhos são percorridos em seus dois sentidos, sem que, com isto, os limites extremos desta estrada possam ser atingidos de forma contínua. Por sua vez, os transreais são visualizados como a mesma estrada, com o adendo de que, agora, há um sol que a ilumina constantemente, sem ser ponto de fuga de qualquer caminho que a estrada admita.

Ao contrário do ocorre com os transfinitos, os transreais constituem um domínio no qual se pode definir uma "distância" entre os elementos; e, neste caso, inclusive a possibilidade de distâncias infinitas (ou mesmo de valor "nulidade") é perfeitamente aceitável.

James Anderson introduz os transreais de forma intuitiva e axiomática. Ele define os transreais como sendo os reais unidos a três novos elementos: infinito, menos infinito e o nulidade. A concepção de o infinito e o menos infinito unidos ao conjunto dos números reais já é conhecida. Em teoria de medida e integração, por exemplo, é comum trabalhar-se com o conjunto dos reais estendidos. O nulidade, por sua vez, foi concebido por Anderson inspirado na geometria projetiva. Um modelo para o plano projetivo se dá identificando pontos a retas e retas a planos. Mais precisamente, no espaço euclidiano xyz (que aqui será tratado indistintamente de $\mathbb{R}^3$) com origem O, escolhe-se um plano π paralelo, não coincidente, ao plano xy. Cada ponto P do plano π é identificado a única reta que passa por O e por P (Figura 2), e cada reta r em π é identificada ao único plano que passa por O e por r (Figura 2).

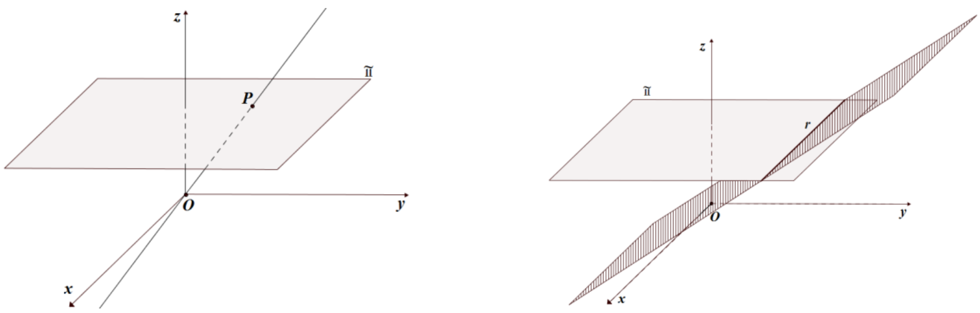

Figura 2

Assim, existe uma aplicação injetiva do conjunto formado por todos os pontos e retas em π e o conjunto formado por todas as retas e planos em $\mathbb{R}^3$ que passam por O. Porém esta aplicação não é sobrejetiva, pois as retas contidas no plano xy que passam por O não correspondem a nenhum ponto em π (Figura 3) e o plano xy não corresponde a nenhuma reta em π (Figura 3).

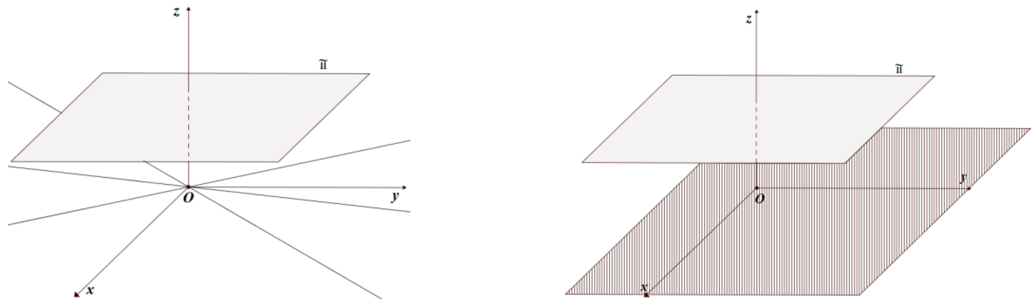

Figura 3

Observe que as retas contidas no plano xy que passam por O possuem vetor diretor do tipo (x, y, z), onde $z = 0$ e x e y não são simultaneamente nulos, e o plano xy possui vetor normal do tipo $(0,0, w)$, onde $w \neq 0$.

Agora, notemos o seguinte. Sejam s uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por O e (x, y, z) um vetor diretor de s. O vetor (x', y', z') é também um vetor diretor de s se, e somente se, existe um número real k não nulo tal que $x = kx'$, $y = ky'$ e $z = kz'$. Isto induz a seguinte relação em $\mathbb{R}^3$: dois vetores (x, y, z) e (x', y', z') em $\mathbb{R}^3$ são ditos equivalentes se, e apenas se, existe um número real k não nulo tal que $x = kx'$, $y = ky'$ e $z = kz'$. Observe que para cada ponto no plano π, existe uma única classe de equivalência de vetores (x, y, z), onde $z \neq 0$. E analogamente, para cada reta no plano π, existe uma única classe de equivalência de vetores (u, v, w), onde u e v não são simultaneamente nulos.

A fim de se ter uma correspondência biunívoca entre os pontos no plano projetivo e as retas em $\mathbb{R}^3$ que passam por O e uma correspondência biunívoca entre os retas no plano projetivo e os planos em $\mathbb{R}^3$ que passam por O adotam-se as seguintes definições. Um ponto no plano projetivo é a classe de equivalência de todos os vetores (x, y, z) que são vetores diretores de uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por O, isto é, um ponto no plano projetivo é uma classe de equivalência de um vetor em $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$. Uma reta no plano projetivo é a classe de equivalência de todos os vetores (u, v, w) que são vetores normais a uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por O, isto é, uma reta no plano projetivo é uma classe de equivalência de um vetor em $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ (PENNA, 1986). Desta forma, a classe do ponto $(0,0,0)$ não faz parte do plano projetivo.

Seja $z = c$, onde c é uma constante real não nula, a equação do plano π. Observe que todo ponto de π tem coordenada (x', y', c). Observe também que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das classes de equivalência de coordenadas (x, y, z) com $z \neq 0$ e o conjunto dos pontos (x', y', c). A univocidade se dá pelo fato de (x, y, z) ser equivalente a $\left(\frac{xc}{z}, \frac{yc}{z}, c\right)$. O que não faria sentido se $z = 0$. Com isso, considerar também as classes de pontos da forma (x, y, z) com $z = 0$ e x e y não simultaneamente nulos, contorna o problema de aparecer $\left(\frac{xc}{0}, \frac{yc}{0}, \frac{0}{0}\right)$. Anderson observa que o caso $\left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right)$ é deixado de lado. Para ele, a inclusão do ponto $(0,0,0)$ no modelo projetivo pode ser aplicada em teoria da computação (ANDERSON, 1997). Anderson defende sua tese e se refere ao ponto (0,0,0) como um ponto em *nulidade*.

Não há dúvida de que os números transreais consistem em uma inovadora extensão dos números reais. Anderson concebe os números transreais de forma axiomática. Estes axiomas (em um total de trinta e dois) consistem em quatorze proposições que apresentam o comportamento "esperado" das operações aritméticas (adição, subtração, divisão e multiplicação) quando aplicadas aos reais, mais dezoito que regulam o comportamento "desviante" de tais operações quando os estritamente transreais aparecem como argumentos. Tais proposições "desviantes" são as seguintes (a numeração utilizada é a mesma que se encontra no artigo original de Anderson):

A4) $\Phi + a = a$;

A5) $a + \infty = \infty$, *sendo* $a \neq -\infty$ *e* $a \neq \Phi$;

A8) $a - a = 0$, *sendo* $a \neq \pm\infty$ *e* $a \neq \Phi$;

A9) $\Phi = -\Phi$;

A10) $a - \infty = -\infty$, *sendo* $a \neq \infty$ *e* $a \neq \Phi$;

A11) $\infty - \infty = \Phi$;

A15) $\Phi \times a = \Phi$;

A16) $\infty \times 0 = \Phi$;

A18) $a/a = 1$, *sendo* $a \neq 0$ *e* $a \neq \pm\infty$ *e* $a \neq \Phi$;

A19) $(a^{-1})^{-1} = a$, *sendo* $a \neq -\infty$;

A20) $0^{-1} = \infty$ *(definição de* ∞*)*;

A23) $\infty \times a = \infty$ *se, e somente se,* $a > 0$;

A24) $\infty \times a = -\infty$ *se, e somente se,* $a < 0$;

A25) $\infty > 0$;

A30) para todo transreal a, $a > 0$ *ou* $a < 0$ *ou* $a = 0$ *ou* $a = \Phi$;

A31) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, *se não é caso de:(*$a = \pm\infty$ *e* $sgn(b) = sgn(c)$ *e* $(b + c) \neq \Phi$ *e* *(b + c) $\neq 0$)*[4].

A32) para todo $X \subseteq R^T - \{\Phi\}$, existe um $u \in X$, tal que para todo $y \in Y$, com $Y \subseteq X$, $u \leq y$ (existência do elemento ínfimo) e existe um $v \in X$, tal que para todo $y \in X$, com $Y \subseteq X$, $y \leq v$ (existência do elemento supremo).

(o axioma 32 afirma que $R^T - \{\Phi\}$ é um reticulado completo)

Em resumo, a aritmética dos transreais se dá da seguinte forma:

Simétrico: $-\Phi = \Phi$, $-(\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = \infty$.

Recíproco: $0^{-1} = \infty$, $\Phi^{-1} = \Phi$, $\infty^{-1} = 0$, $(-\infty)^{-1} = 0$.

Adição: $\Phi + x = \Phi$, $\infty + x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{-\infty, \Phi\} \\ \infty, & x \notin \{-\infty, \Phi\} \end{cases}$, $-\infty + x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{\infty, \Phi\} \\ -\infty, & x \notin \{\infty, \Phi\} \end{cases}$.

Multiplicação: $\Phi \times x = \Phi$, $\infty \times x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{0, \Phi\} \\ \infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$, $-\infty \times x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{0, \Phi\} \\ -\infty, & x > 0 \\ \infty, & x < 0 \end{cases}$.

4. Os Números Transreais e o Conceito de Distância Infinita

A introdução de fatores métricos nos transreais pode ser feita através de uma extensão natural do conceito de espaço métrico. Seja γ uma função definida em $(\mathbb{R}^T)^2$. Com valores possíveis, γ admite números reais ou $1/0 = \infty$. γ é uma "generalização" de uma métrica d, se as seguintes condições forem satisfeitas (ANDERSON, [2008]):

1) γ(a,b) = γ (b,a)

2) γ(a,b) = 0 se, e só se, a = b.

---

[4] No axioma 31, sgn (x) é a função sinal, definida da forma seguinte:
se x > 0, sgn (x) = 1;
se x < 0, sgn (x) = -1;
se x = 0, sgn (x) = 0;
se x = Φ, sgn (x) = Φ

Synesis, v. 5, n. 2, p. 197-210, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

3) $\gamma(a,b) = \delta(a,b)$ **se, e só se,** $a \neq b$ **e** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

4) $\gamma(a,b) = \infty$ **se, e só se,** $a \neq b$ **e** $(a,b) \in [(\mathbb{R}^T)^2 - \mathbb{R}^2]$

Podemos também definir uma função τ, chamada *transmétrica*. Seja P um conjunto e τ uma função definida de $P \times P$ em $\mathbb{R}^T$. A função τ é chamada de *transmétrica* se satisfaz as seguintes condições (ANDERSON, *ibidem*):

T1) $\tau(a,b) = \tau(b,a)$

T2) $\neg(\tau(a,b) < 0)$.

T3) $\tau(a,b) = 0$ **se, e só se,** $a=b$.

T4) $\neg(\tau(a,b) + \tau(b,c) < \tau(a,c))$.

Se os transfinitos de Cantor são definidos como conjuntos, e como tais se mostram inadequados às questões métricas, o mesmo não se diz dos transreais: na qualidade de um espaço (trans)métrico, há sempre uma distância definida entre dois elementos quaisquer e as leis que regulam tais distâncias são dadas pelos postulados (T1) - (T4).

A noção de espaço métrico é o fundamento matemático sobre o qual se apoia a ideia intuitiva de “distância”. De fato, uma distância qualquer entre dois pontos é compreendida intuitivamente como um caminho (em geral, um segmento de reta) que liga tais pontos; a expressão matemática deste caminho, deste “pedaço de espaço retilíneo”, é um número real maior ou igual a zero. Mas a intuição de distância não precisa, necessariamente, estar presa à ideia de um segmento de reta finito e expresso por um número real. Podemos falar em distâncias infinitas ou mesmo de distâncias que não se definem por meio de *nenhum caminho continuo entre pontos*, mas são mais bem intuídas através da imagem de *salto* entre pontos, ou algo equivalente. Por exemplo, podemos falar sobre a distância entre mundos possíveis, sem que, com isto, queiramos significar uma distância que possa ser expressa por um número real, mas sim por um número infinito, ou mesmo por um número que indique a desconexão completa entre tais mundos[5]. No âmbito dos números reais (e mediante a noção de espaço métrico),

[5] Um contexto em que a transmétrica pode ser útil como estrutura para avaliar distâncias entre mundos pode ser a interpretação que Hugh Everett III dá ao princípio de superposição na física quântica. *Grosso modo*, Everett nos diz que todas as soluções lineares (autoestados) da equação de Schröndinger estão associadas a observadores em mundos possíveis desconexos que avaliam o comportamento de um sistema físico conforme os autovalores correspondentes aos autoestados da superposição. Tais observadores estão “desconectados” uns dos outros, e, portanto, não pode haver uma distância real entre eles; isto pode sugerir que a distância entre tais observadores seja

estamos impossibilitados de apresentar tais distâncias, mas com a noção de transmétrica isto é perfeitamente possível: no caso de distâncias infinitas, obviamente o transreal ∞ se presta para tanto; para expressar o caso de "desconexão completa" entre os objetos que distam entre si, o transreal Φ aparece como o candidato mais adequado.

infinita ou expressa pelo número transreal Φ. Sobre a interpretação dos estados quânticos superpostos como mundos possíveis, ver Everett, [1973])

Referências Bibliográficas

ANDERSON, J. A. D. **Transmathematics. How to divide by zero using only the operations of ordinary arithmetic, but ignoring the prescription not to divide by zero in such a way as to preserve the maximum information about the magnitude and sign numbers**. Disponível em: http://www.bookofparagon.com/Books/Transmathematics/Transmathematics.pdf. Acesso em: 19 de setembro de 2013.

ANDERSON, J. A. D. W. **Perspex Machine XI: Topology of the Transreal Numbers**. Disponível em: http://www.bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineXI.pdf. Acesso em: 19 de setebmro de 2013.

ANDERSON, J. A. D. W. Representing geometrical knowledge. **Philosophical Transaction of The Royal Society**, v. 352, n. 1358, p. 1129-1140, 1997.

ANDERSON, J. A. D. W.; VÖLKER, Norbert; ADAMS, Andrew A. Perspex Machine VIII: Axioms of Transreal Arithmetic. Disponível em: http://opendepot.org/83/1/PerspexMachineVIII.pdf. Acesso em: 10 de setembro de 2013.

CANTOR, G. Beiträge zur Begrundung der Transfiniten Mengelehre. In: **Contributions to the Founding of the Transfinite Numbers I**. Dover Publications, New York, 1941.

CANTOR, G. Cantor´s Grundlagen. In: EWALD, W. ed. **From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.** Volume 1. Clarendon Press, Oxford, 1999.

CANTOR, G. Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,** n. 77, p. 258–262, 1874.

EVERETT, H. The Theory of the Universal Wave Function. In: **The Many World Interpretation of Quantum Mechanics**. De Witt and Graham (Eds), Princeton University Press, Princeton. Disponível em: http://www-tc.pbs.org/wgbh/nova/manyworlds/pdf/dissertation.pdf. Acesso em: 10 de setembro de 2013.

FORTI, C. Burali. Une Questioni Sui Numeri Transfiniti. A Question On The Transfinite Numbers and Well-Ordering Classes. In: HEIJENOORT, J. VAN, ed, **From Frege to Gödel.** Harvard University Press, Cambridge University Press, Cambridge Mass, 1981.

PENNA, M. & PATTERSON, R. **Projective Geometry and Its Applications To Computer Graphics**. Prentice Hall, 1986.

TONDERING, C. **Surreal Numbers – An Introduction**. Disponível em: http://www.tondering.dk/claus/sur16.pdf. Acesso em: 19 de setembro de 2013.

Universidade Católica de Petrópolis
Centro de Teologia e Humanidades
Rua Benjamin Constant, 213 – Centro – Petrópolis
Tel: (24) 2244-4000
synesis@ucp.br
http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis

GOMIDE, Walter; REIS, Tiago. NÚMEROS TRANSREAIS: SOBRE A NOÇÃO DE. **Synesis**, http://seer.ucp.br/seer/index.php/synesis, v. 5, n. 2, p. 197-210, dec. 2013. ISSN 1984-6754. Disponível em: http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&page=article&op=view&path%5B%5D=413. Acesso em: 18 Dec. 2013.