Synesis, v. 12, n. 2, p. 67-87, ago/dez 2020, ISSN 1984-6754

A FILOSOFIA DA MATEMATICA DE KANT NO (NOVO) TRIBUNAL DA RAZÃO: ALGUNS ASPECTOS DO ANTI-INTUICIONISMO NO SECULO DEZENOVE E UMA VARIANTE NEOKANTIANA

KANT'S PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE (NEW) COURT OF REASON: SOME REMARKS OF THE ANTI-INTUITIONISM IN THE NINETEENTH CENTURY AND ONE NEO-KANTIAN VARIANT*

LUCAS ALESSANDRO DUARTE AMARAL**
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, BRASIL

Resumo: Neste artigo serão expostos e discutidos alguns aspectos com respeito ao surgimento do projeto logicista e, ao final, será apontada uma variante dele na filosofia da matemática no neokantismo Ernst Cassirer. Para isso, a argumentação seguirá nos seguintes termos: em primeiro lugar, será levado em conta o ponto de partida de todo esse debate: a rejeição de Kant por parte dos filósofos e matemáticos já nos primeiros anos do século dezenove. Feito isso, será discutido qual o ponto a ser batido por essa tradição de autores e dois frutos que surgiram dessa reação ao filósofo de Königsberg. No terceiro momento, serão trabalhados brevemente três autores que, por assim dizer, são considerados os pilares fundamentais com respeito ao programa logicista (Frege, Russell e Dedekind). Na parte final do texto, será dito algo a respeito da importância do último autor no contexto da filosofia juvenil do neokantiano Ernst Cassirer.

Palavras-chave: Kant, logicismo, século dezenove, neokantismo, Cassirer.

Abstract: In this paper it will be exposed and discussed some remarks on the emergence of the logicist project and, in the end, it will be pointed out one variant of it in the Neo-Kantian Ernst Cassirer in his philosophy of mathematics. In order to fulfill such task, the argumentation will be as follows: firstly, it will be taking into account the starting point of the debate: the rejection of Kant by philosophers and mathematicians already in the first years of the nineteenth century. That done, it will be discussed which is the point to be overcome by this tradition and two results that emerged of this reaction to Kant. In the third moment it will be treated briefly three fundamental authors concerning the logicist program (Frege, Russell and Dedekind). In the final moment of the text, it will be said something about the importance of this last author in the context of Ernst Cassirer's early epistemology.

* Artigo recebido em 12/11/2020 e aprovado para publicação pelo Conselho Editorial em 12/12/2020.
** Pós-doutorando (PNPD/CAPES) em filosofia pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2897-1648 E-mail: lucasadamaral@gmail.com

Keywords: Kant, logicism, nineteenth century, Neo-Kantianism, Cassirer.

1. Introdução: no princípio era Kant

No início do século dezenove, a fundamentação da matemática mais corrente à época era aquela encontrada na filosofia kantiana. A ideia de base proposta pela teoria de Kant tinha como fio condutor sua teoria da intuição, na qual era preciso recorrer às intuições puras de espaço (na geometria) e de tempo (na aritmética) para garantir a fundamentação da disciplina em questão. Desse modo, o proceder em uma demonstração matemática se fazia a partir da construção – outra das noções chave em sua filosofia da matemática – de seus conceitos na medida em que lhes são fornecidas as intuições correspondentes.

Muito embora o valor de importância assumido pela proposta de Kant na história da filosofia seja incontestável, uma promissora concorrente surgiu nos anos iniciais do século dezenove). Seu objetivo básico dizia respeito a uma fundamentação da matemática em que não fosse levado em consideração aquele caráter intuitivo, mas uma em que, tão somente, os encadeamentos lógicos entrassem em cena. Dessa maneira, a filosofia da matemática é colocada em um novo "tribunal da razão".[1]

De acordo com o que será argumentado nas linhas a seguir, o logicismo também foi decisivo entre os neokantianos, em particular na filosofia de Ernst Cassirer.[2] Nesses termos, chegamos a uma primeira constatação interessante que merece um maior detalhamento: um modo equivocado de interpretar o projeto dos neokantianos seria partindo do pressuposto (falso) de que eles defendem as mesmas teses de Kant. Se esse fosse de fato o caso, então os vários acontecimentos ocorridos no século dezenove haveriam de ser deixados de lado. A epistemologia kantiana, lembremos, teve como objeto de investigação a ciência da época de Kant, representadas por seus paradigmas científicos – tais como: a geometria de Euclides e a mecânica de Newton. Por sua vez, a epistemologia neokantiana teve como objeto de investigação a ciência de seu tempo – e o século dezenove é bastante rico em novos temas

[1] A referência aqui a noção de "tribunal da razão" (tanto no título do artigo, quanto neste momento) é, deliberadamente, de matriz kantiana na *Crítica da Razão Pura*. Cf. *KrV*, A XII.

[2] E não só ele, mas também Natorp, que levou em conta esse projeto em seus ensaios sobre as ciências exatas/naturais. Cf. NATORP (1910). Por uma tal razão, deixemos manifesto, já de início, que esses autores também fizeram parte do amplo grupo – compostos por filósofos e matemáticos do século dezenove – que seriam, por assim dizer, críticos de Kant nesse particular. E isso ocorre uma vez que esses neokantianos da escola de Marburgo jamais defenderam a tese kantiana de que a matemática dependia das intuições de espaço e tempo em sua fundamentação, senão que a lógica era a disciplina responsável por isso

nas ciências; seja no campo das ciências naturais, ou das ciências humanas.[3] Portanto, se a situação da ciência é distinta em cada um dos dois contextos, então o resultado disso não pode ser outro: os neokantianos investigaram e polemizaram sobre os temas e problemas de seu tempo. Embora isso, a princípio, possa soar quase como uma trivialidade, trata-se de algo essencial para entender o significado do que seja o movimento neokantiano.

O que foi de fato decisivo aos filósofos da escola de Marburgo (e ao neokantismo de modo geral), e com respeito a isso eles realmente são devedores de Kant, é o seu modo de fazer filosofia: a filosofia é entendida enquanto uma atividade essencialmente reflexiva. Essa nota característica da filosofia transcendental foi decisiva a Cassirer[4] e condicionou basicamente todo seu projeto filosófico.

2. O ponto comum da tradição: o aspecto anti-intuicionista na filosofia da matemática

São pelo menos dois os pontos que devemos mencionar a respeito da convergência entre Cassirer (na escola de Marburgo) e dos filósofos e matemáticos que trabalharam no projeto de fundamentação da matemática na lógica:

1. Eles partilham da opinião de que a intuição não desempenha nenhum papel quando se trata, por exemplo, da fundamentação do conceito de número e
2. eles partilham da opinião de que a matemática não se trata de uma disciplina empírica.

A seguir, serão tratados alguns desses desdobramentos que surgiram no início do século dezenove com respeito unicamente a essa luta contra o intuicionismo, de matriz kantiana.[5]

[3] Tanto é assim que o século dezenove ficou conhecido por ser o "século das ciências". Diversas disciplinas e novas teorias surgiram nesse momento da história em uma vasta gama de autores. Pela limitação proposta pelo escopo deste texto, nos ocuparemos quase que unicamente com um aspecto – a saber, o surgimento do projeto logicista e seu lugar dentro do neokantismo juvenil de Cassirer – do que costumeiramente ficou conhecido, sobretudo pelo advento do neokantismo, por "*Faktum* da ciência".
[4] Naturalmente que outros aspectos filosóficos do pensamento de Kant também o foram. Na última parte deste trabalho também levaremos em conta outro aspecto central da filosofia kantiana na epistemologia de Cassirer.
[5] Por conta de um desvio do tema geral deste artigo, não serão explorados os pontos relativos à crítica das posições empiristas daquele tempo, que seriam merecedores de um tratamento a parte.

2.1. O projeto de aritmetização da análise

A aritmetização da análise foi um dos primeiros programas que surgiram no panorama científico do século dezenove com objetivo de tornar a "análise" uma disciplina de caráter autônomo. E em sua forma mais elementar, essa ideia buscava resolver um problema da ordem do dia naquele momento: proporcionar formulações rigorosas às ideias intuitivas do cálculo. Mais especificamente, os conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, tais como: limite, infinitesimal[6] e de função.

No entanto, vale mencionar ainda que o projeto de tornar mais rigorosa a análise não surgiu de uma mudança repentina, levada a efeito por teóricos de lugares distintos como nos casos de Cauchy (talvez o mais conhecido nesse projeto) ou até mesmo Bolzano (talvez o menos conhecido). O caso é que esse projeto comum, iniciado nas primeiras décadas do século dezenove,[7] foi um acontecimento que recebeu acentos diferentes por parte de diversos autores.

Quanto às motivações históricas para que o projeto viesse ao debate da época, levem em consideração que elas vieram de várias frentes, e aqui serão retomadas quatro delas:

1. Isso surgiu a cena da época, por exemplo, por conta de reformas curriculares no ensino das universidades – como ocorreu no caso da Alemanha, com Humboldt – em que o disciplina de matemática foi desvencilhada do campo da física teórica;
2. Como já mencionado, outro dos motivos se deu no sentido de proporcionar um método mais rigoroso de verificação e sistematização dos resultados das ciências;
3. E também no intuito de oferecer respostas a questões tais quais, o problema acerca da aprioridade da intuição geométrica nas geometrias não-euclidianas e,

[6] Newton e Leibniz basearam seu trabalho em considerações geométricas. Embora os resultados finais de seus métodos fossem indiscutíveis, os métodos mesmos não o eram. Central para tais preocupações era a noção de uma quantidade infinita, ou indefinidamente pequena, a saber, a de infinitesimal, que tinha essa propriedade a qual não era bem definida: algumas vezes era zero e outras diferente de zero.

[7] Em 1810 Bolzano publica seu *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. No apêndice desse texto, intitulado: *Über die Kantische Lehre Von der Construction der Begriffe duch Anschauungen,* esse comprometimento anti-intuicionista na matemática e sua posição contra Kant são evidentes.

4. Até mesmo antes desse problema, como foi no caso de um autor como Gauss, em que já se colocava em suspeita a independência do postulado das paralelas.[8]

Ainda do ponto de vista histórico, um dos frutos mais importantes desse promissor projeto, em suas origens, foi o texto do matemático francês mencionado anteriormente: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), publicado em 1821 e intitulado: *Cours d'Analyse*. Essa obra foi um marco de referência e a partir dela a busca pelo lugar autônomo da análise foi partilhada em diversos lugares. Assim, não só no ambiente francófono, mas sobremaneira no ambiente germânico, levando em consideração o trabalho de um autor como Karl Weierstrass (1815-1897).[9]

Com os feitos de Weierstrass foram encontradas as exigências de que os resultados alcançados naquela disciplina deveriam ser seguidos por intermédio de definições e métodos, em que elementos externos a isso não entravam em cena. Nesses termos, a tese da aritmetização da análise é essencial: ela não deve ser mais guiada na geometria (terceiro ponto colocado acima), como fizeram autores como Euler e Gauss. Weierstrass acreditava que somente sob essa exigência poderíamos alcançar o ideal de rigor desejado. Aos fins deste trabalho, tenha-se presente os pontos a seguir que resumem de maneira minimante adequada a importância de seus feitos:

1. Em primeiro lugar é conveniente retomar que um projeto de fundamentação envolve uma redução, *i.e.*, a explicação de um determinado domínio conceitual (no mais das vezes mais amplo) ocorre por intermédio de um grupo mínimo de conceitos, que serão considerados primitivos.
2. E essa redução pode comportar dois pontos essenciais:
   a. um aspecto técnico, em que uma teoria traduz diferentes teorias e
   b. um aspecto ontológico, em que a redução é entendida enquanto subsunção dos conceitos a outros conceitos, compreendidos em sua natureza mais elementar.

[8] Todos esses casos, cada um à sua maneira, colocaram em evidencia o ponto em comum que vimos insistindo: o uso problemático e o papel desempenhado pelo conceito de intuição. Tais narrativas, acreditamos, cumprem um papel mais decisivo, e menos anedótico, quanto ao esforço imprimido por essa geração de teóricos que partilharam desse objetivo comum. Cf. FERREIRÓS (1999), especialmente o capítulo I da obra, sobre esse aspecto contextual da matemática no início do século dezenove.

[9] Já segunda metade do século dezenove, a tendência quanto ao projeto de eliminação desse elemento "intuitivo" na matemática aumenta expressivamente. E o autor que coroa esse momento é, o também alemão, Richard Dedekind – figura-chave no programa de uma fundamentação lógica do número e de particular importância na epistemologia juvenil de Cassirer.

3. Tal fundamentação visa à economia metodológica, de um lado, e, de outro, a sistematização unitária – e dependendo do caso, ontológica – dos resultados adquiridos a partir dos conceitos originais.
4. A tese da aritmetização da análise foi pensada nesse mesmo esquema: em particular a motivação técnica que funda a tese da aritmetização, diferentemente, e de modo independente, de uma interpretação ontológica – *e.g.,* Kronecker, citado por Cassirer,[10] cuja redução do sistema numérico ao número natural era a prova de sua primazia ontológica.
5. Da construção dos números reais depende a teoria das funções, a qual assume um papel importante na análise de Weierstrass; e aquela, do número natural.
6. Nesse mesmo período algumas alternativas de construções dos números reais, embasadas na mencionada tese, mostraram-se satisfatórias.
7. Levem em consideração aquela de Cantor,[11] revisitada por Weierstrass, e a de Dedekind.[12] A construção dos números reais visa, em instância última, aritmetizar a imagem intuitiva do contínuo unidimensional representado em geometria pela reta. A ideia subjacente é a de que, a partir de pares de números naturais, definir os racionais, e a partir destes, os irracionais. A introdução dos irracionais varia entre os autores quanto àquilo que Cantor[13] denomina "momento gerador",[14] a saber:
   a. Weierstrass introduz os números irracionais por meio da definição de séries de somas finitas de números racionais em que o resultado sempre é limitado por um valor estipulado.
   b. O próprio Cantor pelo conceito de série fundamental.
   c. Dedekind, por meio da sua teoria dos cortes,[15] a divisão de todos os números racionais em dois conjuntos (a^1) e (a^2), tal que para todos os elementos de ambos vale $a^1 < a^2$.

Além do projeto de aritmetização da análise, outro programa foi nuclear dentre os autores que se dicaram a estudar filosofia da matemática no século dezenove: o programa

[10] Cf. CASSIRER (1910) p. 41-42.
[11] Cf. CANTOR, G. 1872, "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, 5: 123–132. In Cantor 1932: 92–102. (Doravante: CANTOR, 1872)
[12] Cf. DEDEKIND (1872).
[13] Cf., CANTOR (1872).
[14] Cf. CASSIRER (1910), p. 66-67.
[15] No próximo item a "teoria dos cortes" de Dedekind será retomada.

logicista. De particular importância ao neokantismo da escola de Marburgo, e sobretudo na filosofia juvenil de Ernst Cassirer, três "variantes" desse projeto foram essências (Frege, Dedekind,[16] e Russell), como será tratado a seguir.

2.2. O projeto logicista

O termo logicismo refere-se à uma tendência, programa ou doutrina que reduz a matemática à lógica. É corriqueiro encontrar na literatura que Frege e Russell foram os primeiros proponentes de tal visão.[17] Endossando isso, retenha-se as palavras de Carnap que, em uma conhecida passagem, definiu esse programa nos seguintes termos:

> Logicismo é a tese que afirma que a matemática pode ser reduzida a lógica, sendo, pois, parte dela. Frege foi o primeiro a expor tal visão. No majestoso livro, *Principia Mathematica*, os matemáticos ingleses A. N. Whitehead e B. Russell produziram uma sistematização da lógica a partir da qual eles construíram a matemática [18]

Embora não haja nenhum problema em considerá-los defensores da tese logicista – como em geral se faz, acertadamente –, não é correto dizer que ambos comungam ou defendem um mesmo ideal de logicismo. Isso porque cada um deles levou a efeito a tese de um modo bastante peculiar. Por exemplo, há uma divergência quanto ao domínio que esse programa cobre, *i.e.*, se ela vale para toda matemática ou parte dela. Frege afirmava[19] que tal tese vale somente no caso da aritmética, ou seja, que a aritmética pode ser reduzida à lógica; dessa forma, o conceito de número, por exemplo, é um conceito de lógica pura e os próprios números são, como ele diz, objetos lógicos. Todavia, o filósofo de Jena não considera que a

---

[16] Entretanto, poderia surgir aqui uma questão de alguém já familiarizado com essa temática: Dedekind não seria enquadrado enquanto um representante do "estruturalismo" ao invés de ser considerado um "logicista"? Se se levar em consideração a "história da matemática" não haveriam muitas dúvidas quanto a isso: sim, Dedekind é estruturalista; contra isso existe o que argumentar. Todavia, do posto de vista do escopo e dos objetivos deste trabalho – a saber, a variante neokantiana – essa distinção categórica (estruturalismo e logicismo) não funciona exatamente dessa maneira. Isso pelo fato de que, se se pensar especificamente na época de Cassirer tais caracterizações não existiam tais como hoje existem, então Cassirer caracteriza o pensamento de Dedekind como um tipo peculiar de logicismo.

[17] E também o nome de Dedekind poderia também ser mencionado entre aqueles que expressaram a convicção de que a aritmética é parte da lógica.

[18] CARNAP (1931). P. 91.

[19] Cf., por exemplo, os §§ 90-91 de *Os Fundamentos da Aritmética* (1884).

Synesis, v. 12, n. 2, p. 67-87, ago/dez 2020, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

geometria também fosse parte da lógica,[20] como havia feito B. Russell. Para o inglês, toda[21] matemática, ou seja, tanto aritmética quanto geometria, é lógica.[22]

Apesar dessa e de outras diferenças, o ponto em comum com respeito a essa visão na matemática que mais interessa agora é aquele relativo à mudança de paradigma ocorrida na lógica no século dezenove, condicionante para que tal tese viesse ao debate. Em outras palavras, o logicismo não seria possível sem uma profunda transformação da lógica. E essa mudança ocorreu especialmente graças ao trabalho de Frege.[23]

A partir do trabalho pioneiro de Frege, o raciocínio matemático se fez realizável sob as formas lógicas de argumentação reconhecidas. Não fosse isso, a plausibilidade do ensinamento de Kant de que o raciocínio matemático não é puramente discursivo permaneceria em voga por algum tempo ainda. A nova lógica de Frege possibilitou representar o raciocínio matemático padrão na forma de derivações puramente lógicas. Mesmo tendo em vista a importância desse projeto em seu contexto, hoje se sabe que o projeto logicista foi minado por pelo menos dois desdobramentos decisivos:

1. Pela descoberta de que os princípios assumidos na obra principal de Frege são inconsistentes, e o caráter mais ou menos insatisfatório dos sistemas concebidos para remediar esse problema;
2. Pela descoberta feita por Gödel de que a lógica necessária para derivar todas as verdades matemáticas, em princípio, não pode ser formalizada.

Apesar das aporias que tal programa encontraria na posteridade, o que mais importa aqui são seus aspectos positivos: antes de Frege, o raciocínio matemático não poderia ser

[20] E isso já se fez presente em sua tese de doutorado de 1873: *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*. Nesse texto encontramos pela primeira vez Frege defendendo que a geometria não está subsumida exclusivamente à lógica, mas que era preciso de fato uma intuição. Embora isso seja importante, sobretudo se pensarmos em especifico nesse intuicionismo mitigado em Frege, não é nosso objetivo principal detalhar todo esse complexo movimento.
[21] Cf. o "Prefácio" dos *Principles of Mathematics*.
[22] Para não desviarmos demasiado de nosso horizonte, optamos por não trabalhar as diferenças entre os dois tipos de logicismo: o de Frege e o de Russell. Aos nossos modestos fins, o que mais nos importa deles reflete no ponto em comum básico da tese logicista, mencionado logo acima.
[23] É sabido que um dos mais importantes passos dados na revolução ocorrida na história lógica diz respeito a teoria da quantificação. Com ela a silogística é totalmente reformulada, e a lógica ganha uma nova roupagem. A partir de Frege a afirmação universal do tipo "todo A é B" é interpretada não mais em termos de sujeito e predicado, mas em termos de função e argumento, *i.e.*, reinterpretando tais sentenças como o preenchimento de uma função por um certo argumento. Dessa maneira, o enunciado "todo ser humano é mortal" passa a ser considerado, a partir dessa perspectiva fregeana, da seguinte maneira: "Para todo x, se x é ser humano, então x é mortal". Originariamente, essa teoria visava compreender o modo através do qual a noção de quantificação se dá na linguagem matemática e posteriormente em sua aplicação à filosofia da linguagem enquanto teoria independente.

realizado sob as formas lógicas reconhecidas de argumentação.[24] A nova lógica tornou possível representar o raciocínio matemático na forma de derivações puramente lógicas. E isso não poderia ter sido feito, exceto por uma profunda transformação que ocorreu na própria matemática durante o século dezenove.

No início do século dezenove e com o surgimento desses novos fatos a serem considerados na ciência (em particular na lógica e na matemática), o apelo à "intuição" vinha perdendo força. E, outra vez, procedimentos sistemáticos foram desenvolvidos para a introdução de "novos objetos", ou até mesmo "objetos ideais"[25] em vários ramos da matemática. Dentre eles, três merecem ser destacados:

1. "pontos infinitamente distantes" e "pontos com coordenadas imaginárias" na geometria;
2. "números reais" e "imaginários" (ao lado dos "números racionais") em análise; e,
3. "fatores ideais" de inteiros algébricos no recém-desenvolvido tema da teoria algébrica dos números.

Particularmente nesse último item, Dedekind alcançou resultados fundamentais, que poderiam ser submetidos à investigação matemática geral e ao cálculo real. Com todo esse trabalho em segundo plano, o matemático alemão foi levado a examinar os fundamentos da teoria dos próprios números inteiros, chegando a conclusão de que essa teoria, juntamente com a álgebra e a análise que dela derivam, é uma parte da lógica. Nos termos do autor:

> quero dizer que considero o conceito numérico independente totalmente das noções ou intuições de espaço e tempo, que eu considero um resultado imediato das leis do pensamento. [26]

[24] É bem verdade que já em Aristóteles existia uma teoria da prova, por intermédio da silogística. Cf., por exemplo, os *Analíticos Posteriores*.
[25] Algo que o neokantiano Ernst Cassirer seria crítico, como será problematizado mais adiante.
[26] DEDEKIND (1888). P. 31

Synesis, v. 12, n. 2, p. 67-87, ago/dez 2020, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

3. Os três pilares do logicismo (Frege, Russell e Dedekind)

3.1. A posição de Frege e de Russell[27]

Um problema dos mais fundamentais que os defensores da tese logicista tiveram que enfrentar dizia respeito ao próprio conceito de número. E a solução dessa aporia veio por intermédio de diferentes respostas.

Frege criou, em 1879, um sistema formal inteiramente sistemático e universalmente aplicável codificando todos os conceitos e processos lógicos: sua *Conceitografia*, em que ele mesmo caracterizou nos termos de “uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a Aritmética” (tal como no título completo da obra). Além dessa, também nos *Fundamentos da Aritmética* (1884) e nos volumes das *Leis Fundamentais da Aritmética* (1893/1903), Frege buscou explicitar, dentro da estrutura de tal sistema formal, como os números cardinais podem ser definidos. No entanto, para o filósofo de Jena, nos volumes de suas *Leis Fundamentais da Aritmética*, noções tais como a de “classe” e de “correspondência” não seriam assim tão usuais na lógica ou redutíveis às noções lógicas reconhecidas.[28] Frege acreditava, portanto, que para o fundamento lógico dessas noções de classe e correspondência, nas noções lógicas de “conceito” e “extensão”. A existência de tal extensão para cada conceito satisfaz o princípio de que, por exemplo, dois conceitos têm a mesma extensão se e somente se todo objeto que cai sobre um ou outro também cai sobre o outro. Um tal princípio foi fundamental em sua lógica, bem como o foi no que se refere à sua proposta de fundamentação da aritmética.

Outro autor que seguiu passos similares aos de Frege, dando seguimento à formulação das noções aritméticas em termos de “classes”, foi Bertrand Russell. Do filósofo inglês é conveniente aos nossos interesses retomar a lição a seguir dos *Princípios da Matemática*.[29] Segundo o filósofo inglês, duas classes A, B são ditas “equinuméricas” se, para alguma relação R:

[27] A escolha por trazer no mesmo item os nomes de Frege e Russell é intencional: trata-se de trazer o ponto em comum entre eles para que, nos próximos itens, sejam exploradas as posições críticas de Dedekind e Cassirer sobre os dois autores. No último item deste artigo será visto que Cassirer explora, de modo crítico, a posição “platônica” dos dois autores em matemática, em particular sobre o conceito de número, na medida em que preserva uma ideia de número enquanto uma coisa ou substância.

[28] Cf. FREGE (1893, 1903). Ademais, nos dois primeiros volumes das *Leis Fundamentais da Aritmética* Frege projetou um sistema completo para o tratamento da aritmética, incluindo uma teoria dos números reais.

[29] Cf. a propósito toda a “Parte I” do livro de Russell.

1. Para cada elemento x de A existe um elemento y de B tal que x tem a relação R para y, mas para nenhum outro elemento de B e
2. Para cada elemento y de B existe um elemento x de A tal que x, mas nenhum outro elemento de A, tem a relação R para y.

Diz-se que R é uma relação "um para um" entre A e B. Por sua vez, "equinumérico", como definido, é uma relação binária que se mantém entre certas "classes". Ser "equinumérico" com uma determinada classe A é, portanto, uma propriedade que certas classes possuem.

No uso de Frege, a extensão dessa propriedade (ou conceito) – e, portanto, a classe de todas essas classes – é chamada de "o número da classe A". Dessa maneira, é possível definir números individuais como "objetos", em termos puramente lógicos. Quanto ao conceito geral de número "n é um número", significa que há alguma classe A tal que n é o número da classe A.

3.2. A posição de Dedekind

Richard Dedekind foi outro dos autores que vinha trabalhando nesse projeto de "tornar a matemática parte da lógica". Dos paralelismos mencionáveis entre ele, Frege e Russell, tenha-se presente a noção central que tratada no item anterior, a saber, a de "classe". Embora o matemático alemão não use o mesmo nome encontrado nos outros dois (*i.e.*, classe), mas sim o de "sistema", esse conceito também foi central na teoria de Dedekind. No ano de1888, ele o define da seguinte maneira:

> Tal sistema S (um agregado de coisas, uma multiplicidade, uma totalidade), enquanto um objeto do nosso pensamento é completamente determinado quando, em relação a tudo, é determinado se é um elemento de S ou não. O sistema S é, portanto, o mesmo que o sistema T, em símbolos $S = T$, quando todo elemento de S é também um elemento de T, e todo elemento de T é também um elemento de S. Para uniformidade de expressão é vantajoso incluir também o caso especial onde um sistema S consiste em um único (um e somente um) elemento a, isto é, a é um elemento de S, mas toda coisa diferente de a não é um elemento de S. [30]

[30] DEDEKIND (1888) P. 45.

3.2.1. Os anos de 1872 até 1888

Qualquer manual de história da matemática confirma que Dedekind foi um dos matemáticos mais criativos e influentes do século dezenove.[31] Entre os historiadores dessa disciplina, ele é quase sempre lembrado pelos seus trabalhos pioneiros em álgebra e teoria algébrica dos números. Para além desses feitos, o trabalho do matemático alemão também foi fundamental entre os filósofos de seu tempo, como é no caso de Cassirer. Em específico na filosofia do neokantiano, seus dois os escritos sobre os fundamentos da matemática – o *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) e *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) – são retomados com frequência. O primeiro deles diz respeito aos números reais, construídos a partir dos números racionais como um campo ordenado completo, enquanto o segundo introduz os números naturais, baseados na noção de "sistema simplesmente infinito" (*ssi*).

Em 1872, ele começa comparando a linha geométrica dada intuitivamente com o sistema de números racionais concebidos como um sistema ordenado. Prescindindo das intuições geométricas a partir de então, ele define o que significa para os racionais serem densamente ordenados. Ele também distingue tal densidade explicitamente da continuidade (integralidade da linha) por meio de sua noção de corte; e aponta, por fim, que o sistema de racionais não é contínuo, *i.e.*, nem todo corte é determinado por um número racional (*p.ex.*, o corte correspondente a $x^2 \leq 2$). Em seguida, ele considera o conjunto de todos os cortes nos números racionais que podem ser dotados de operações de adição e multiplicação juntamente com um ordenamento próprio; todos induzidos por características correspondentes do sistema de racionais. Depois disso, ele mostra que os resultados são um campo ordenado que é contínuo em relação ao seu ordenamento e outro no qual o sistema de números racionais pode ser incorporado naturalmente (através de um homomorfismo injetor para campos ordenados).

Em resumo, o objetivo principal do ensaio de 1872 de Dedekind foi cumprido na medida em que ele nos fornece uma introdução sistemática dos números reais, com base nos números racionais e em certas construções de conjunto teórico ou "lógicas". Isso foi feito de tal forma que todos os teoremas centrais à análise real foram provados. Como tal, tratou-se também de uma contribuição para a "aritmetização da análise" no século dezenove, como visto outrora. Aritmetização implica aqui que tudo o que precisamos para

[31] Cf. FERREIRÓS (1999).

análise são os números naturais, juntamente com algumas leis gerais do pensamento pressupostas. Dedekind tinha em mente que os números racionais podem ser construídos a partir dos inteiros, e então os inteiros fora dos números naturais, em cada caso como (classes de equivalência de) pares, completando assim essa "aritmetização".

Contudo, ficam as questões: e os números naturais em si? ou seja, qual é a "natureza e função" deles? Mais ainda, o que dizer das construções teóricas estabelecidas ao longo do caminho, por exemplo, ao formar o sistema de todos os cortes? Para dar conta de responder essas questões, Dedekind dedica – o pequeno em tamanho, porém extremante denso em conteúdo – ensaio de 1888. Nesse texto, basicamente, o matemático tinha como objetivo mostrar que sim é possível levar a aritmetização da análise um passo adiante, para uma completa "logicização". Todos os resultados do ensaio de 1872 de Dedekind tornaram-se padrão *standard* em apresentações posteriores dos fundamentos (clássicos) da análise real e em sua reconstrução teórica. Dentro da teoria dos conjuntos, por exemplo, o próximo passo a ser dado seria o de identificar o campo ordenado de números reais com o sistema de cortes construído para fins matemáticos. No entanto, não foi exatamente que fez Dedekind no ano de 1888. Ao invés disso, ele acrescenta mais um passo a seu projeto, valendo-se da noção de "criação livre"; que foi assim descrita:

> Sempre que, então, temos a ver com um corte (*A1, A2*) produzido por nenhum número racional, criamos um novo, um número irracional α, que consideramos completamente definido por esse corte (*A1, A2*); diremos que o número *a* corresponde a este corte, ou que produz este corte. [32]

Se ampliado o panorama teórico e se pensar na "teoria dos conjuntos" e, em particular, o procedimento de Zermelo, nota-se que ao final das contas ele é próximo daquele de Dedekind. Com as diferenças de que ele começa com o número 0, não com 1 e ao fato de que Dedekind não identificou sua noção de "*ssi*" construído inicialmente com os números naturais (*N*) com os sistemas correspondentes, que se encontrariam em Zermelo. Nesse sentido, o autor de *Was sind und was sollen die Zahlen* usa novamente a noção de "criação":

> Se na consideração de um sistema simplesmente infinito *N* colocado em ordem por uma função *φ* – nós negligenciamos inteiramente o caráter

[32] DEDEKIND (1888) P. 15.

Synesis, v. 12, n. 2, p. 67-87, ago/dez 2020, ISSN 1984-6754

> especial dos elementos, meramente retendo sua distinguibilidade e levando em conta apenas as relações entre si nas quais eles são colocados pela ordem, definindo a função *φ*, então são esses elementos chamados números naturais ou números ordinais ou simplesmente números, e o elemento base *1* é chamado de número-base da série numérica *N*. Com referência a essa liberação dos elementos de todos os outros conteúdos (abstração) estamos justificados em chamar os números de uma "criação livre" da mente humana.[33]

Nesse ensaio, após a prova de que quaisquer dois infinitos simples são isomórficos, Dedekind justifica essa introdução dos números naturais observando que quaisquer teoremas que se aplicam a um infinito simples possuem validade perfeitamente geral para qualquer outro. Assim, seu procedimento é invariante sob a escolha do infinito simples no início. O que o matemático esboça, em outras palavras, é uma concepção estruturalista dos números.

Por fim, os dois textos de Dedekind constituem investigações fundamentais, quer dizer, estudos sistemáticos das noções e princípios sobre os quais a aritmética – no sentido amplo: dos números naturais através dos números inteiros e racionais aos números reais – pode e deve (como o título do ensaio de 1888 sugere) ser baseada. Ademais, eles também foram esforços legítimos ao estabelecimento da aritmética enquanto "parte da lógica".

4. A variante neokantiana: Cassirer e sua apropriação de Dedekind

Neste momento do texto, serão apontados, por um lado, o exato ponto de convergência entre Cassirer e Dedekind e, por outro, o ponto de divergência entre o neokantiano e o logicismo de Frege/Russell. Isso será feito tendo em vista a última tarefa deste artigo: apresentar as razões de Cassirer para esses acordos e desacordos.

Para isso, vele começar com duas passagens de Cassirer em seu ensaio *Conceito de Substância Conceito de Função: investigações sobre as questões fundamentais da Crítica do conhecimento* (*SF*)*,* de 1910*:*

> 1. Em seu trabalho, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Dedekind mostrou como a construção completa da aritmética e a exaustiva exposição do seu conteúdo científico são possíveis partindo desses princípios

[33] DEDEKIND (1888) P. 15.

Synesis, v. 12, n. 2, p. 67-87, ago/dez 2020, ISSN 1984-6754

> simples. Não traçaremos em detalhes o desenvolvimento matemático desse pensamento, nos contentaremos meramente em enfatizar sua tendência essencial, uma vez que não estamos interessados no conceito de número em si mesmo, mas como um exemplo da estrutura de um "conceito funcional" puro.[34]
>
> 2. O que aqui é dito [*i.e.*, os trabalhos de Dedekind] é exatamente o seguinte: que existe um sistema de objetos ideais cujo conteúdo integral é exaurido em suas relações mútuas. A "essência" dos números está completamente expressa em suas posições. E o conceito de posição deve, antes de tudo, ser entendido em sua maior universalidade e extensão lógica. A distinção exigida para os elementos apoia-se em condições puramente conceituais, não em condições sensório-intuitivas. A intuição do tempo puro sobre a qual Kant baseou o conceito de número é, de fato, desnecessária. Na verdade, pensamos os membros da série numérica como uma sequência ordenada, mas essa sequência nada contém do caráter concreto da sucessão temporal. O três não "segue" o dois como o relâmpago o trovão, pois nenhum deles possui qualquer tipo de realidade temporal, mas, simplesmente, uma constituição lógica ideal. O significado da sequência limita-se ao fato de que o dois entra como uma premissa na determinação do três, de modo que o significado de um conceito só pode ser explicado a partir do outro. O menor número é "pressuposto" pelo maior e fora disso não existe qualquer relação física ou psicológica de mais cedo ou mais tarde, mas uma relação pura de dependência conceitual sistemática.[35]

As palavras de Cassirer expressam aquilo que ele interpreta como sendo o mais valioso na abordagem dedekindiana, a saber, sua proposta matemática na qual se leva em conta de modo quase exclusivo um determinado sistema de relações e este determina o objeto, e não o contrário. Esse aspecto, corrobora exatamente com o que Cassirer compreende por ciência, *i.e.*, um sistema de relações.[36] Portanto, a ideia básica de Cassirer de

[34] CASSIRER (1910), p. 36
[35] CASSIRER (1910), p. 39.
[36] Cf. a propósito o terceiro volume da obra maior de Cassirer, sua *Filosofia das Formas Simbólicas,* CASSIRER (1929). Nela, o autor explora de modo exaustivo esse caráter "relacional" da ciência, cujo início toma corpo em *SF* (1910).

que os números não são "objetos" ou "coisas" se origina no pensamento do matemático alemão, em que é defendida a tese de que os objetos matemáticos são posições em estruturas; e que todas as propriedades essenciais de um número natural particular são propriedades relacionais entre ele (o número) e os outros números.

Além disso, outro ponto central relativo à diferença entre Cassirer e esses autores aparece no modo através do qual ele rejeita os projetos filosóficos de Frege e Russell. Segundo o neokantiano, o logicismo desses autores (*grosso modo*, a tentativa de explicar o *status a priori* da matemática através de sua redução a seus novos sistemas lógicos) nem sequer levanta a questão apropriada sobre o status epistemológico da matemática. Seu verdadeiro caráter é exibido na maneira em que a especificação funcional da matemática estendida às ciências matemáticas da natureza. Dito de outra forma: as relações que são dadas através de funções matemáticas também objetivam o mundo físico. Para um neokantiano, a matemática sempre está em função da física.

Um último aspecto da crítica de Cassirer refere-se à rejeição da metafísica da transcendência, ou seja, a existência absoluta de coisas-em-si. Cassirer defendeu (como Kant havia defendido) que o único conhecimento *a priori* possível é aquele relativo às condições de possibilidade da experiência e nunca aos objetos transcendentes.[37] É por tal razão que Cassirer chega às suas conclusões quanto à matemática, em particular aquela em que o objeto dessa disciplina é a relação e não a coisa, ou no caso dos "platônicos matemáticos", os números enquanto objetos em si.

5. Considerações finais

O século dezenove foi um período marcado por diversas mudanças no campo das ciências. Procurou-se aqui lançar alguma luz ao início de um capítulo dessa história: a luta anti-intuicionista na filosofia da matemática no século dezenove. Para isso, o ponto inicial (e intencional) foi a reação a filosofia da matemática de Kant. Foi visto que uma miríade de pensadores – matemáticos e filósofos – trabalharam, entre outras coisas no projeto de fazer com que certos conceitos existentes em matemática alcançassem um rigor maior do que outrora. Para isso, e a partir da uma reforma ocorrida na lógica, a matemática passa a ser fundada na lógica; prescindindo daquelas intuições de matriz kantiana, do século anterior.

[37] CASSIRER (1910), p. 276-277.

Todo esse percurso foi feito em vistas de explicitar uma variante desse projeto na filosofia do neokantiano Ernst Cassirer.

Sua diferença frente aos "logicistas clássicos" se fez a partir da proposta de Richard Dedekind. Foi visto também que embora Cassirer não tenha se mostrado de acordo com a filosofia da matemática de Kant (e a teoria da intuição pura), o neokantiano preservou aspectos importantes do filósofo de Königsberg, como, por exemplo, a recusa de qualquer resquício de uma metafísica da transcendência (o ponto explorado aqui da crítica do neokantiano as filosofias de Frege e Russell).

REFERÊNCIAS

ANDERSON, R. L. *The Neo-Kantian roots of Anti-Psycologism*. In.: British journal for the history of philosophy, 13:2, 2005. PP. 287-323.

BARONE, F. *Logica Formale e Logica Transcendentale*. Vol. I-II. Edizioni di filosofia. Torino. 1957.

BEANEY, M. *Frege and the role of historical elucidation: methodology and the foundations of mathematics*. In.: FERREIRÓS, J. GRAY, J.J. (eds). The architecture of modern mathematics: essays in history and philosophy. Oxford University Press. 2006. PP. 47-66.

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics*. Second Edition. Cambridge U. Press, 1983.

BIAGIOLI, F. *Cassirer's view of the mathematical method as a paradigm of symbolic thinking*. In.: GIEL, J. (Hrsg.) Ernst Cassirer: Zwischen Mythos und Wissenschaft. Lectiones & Acroases Philosophicae, VIII, 1. 2015. PP. 193-223.

BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics – Part I* (*Algebra I*). [1943]. Addison-Wesley Publishing Company. 1974.

BOWNE, G. D. *Philosophy of Logic* (*1880-1908*). London, 1966.

CANTÙ, P. *The epistemological question of the applicability of mathematics*. In.: Journal for the history of analytic philosophy, vol. 6 nº 3. 2018. PP. 94-114.

CARNAP, R., *Die logizistische Grundlegung der Mathematik*. In: Erkenntniss, vol. 2, 1931.

CASSIRER, E. *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neuren Zeit*. B. II. [1907] Darmstadt: Wissenschaftlische Buchgesellschaft, 1991.

_____________. *Filosofia das formas simbólicas. Primeiro Tomo: A linguagem* [1923] São Paulo: Martins fontes, 2001.

_____________. *Filosofia das formas simbólicas. Segundo Tomo: O pensamento mítico* [1925] São Paulo: Marins Fontes, 2001.

_____________. *Filosofia das Formas simbólicas. Terceiro Tomo: Fenomenologia do conhecimento* [1929] São Paulo: Martins fontes, 2001.

_____________. *Kant und die moderne Mathematik – Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik* [1907] In.: KANT-STUDIEN, Zwölfter band. Berlin, 1907. PP. 1-49.

_____________. *Substance and Function* [1910]. In: Substance and Function and Einstein's Theory of Relativity. Chicago: Open Court, 1953.

COLLINS, J. V. *An elementary exposition of Grassmann's "Ausdehnungslehre", or Theory of extension*. In.: The American Mathematical Monthly. Vol. 6, nº 8-9. 1889. PP. 193-198.

COUTURAT, L. *Les Principles des Mathématiques. Avec un Appendice sur La Philosophie des Mathématique de Kant*. Paris, Félix Alcan, 1905

DEDEKIND, R. *Essays on the theory of numbers*. Chicago: the open court publishing company. 1901.

_____________. *Was sind und was sollen die Zahlen*. Braunschweig: Vieweg. 1888.

DUMMETT, M. *Truth and other Enigmas*. Harvard U. Press, 1978.

FERRARI, M. *Ernst Cassirer and the history of science*. In.: In: FRIEDMAN, J. T. and LUFT, S (eds.). The Philosophy of Ernst Cassirer: a Novel Assessment. Books by Marquette University Faculty. Book 225, 2015. PP. 11-29.

FERREIRÓS, J. *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics*. Springer. 1999.

______________. *O surgimento da abordagem conjuntista em matemática*. In.: Revista brasileira de história da matemática. Vol. 2, nº 4. 2002. PP. 141-154.

FERREIRÓS, J. GRAY, J.J. (eds). *The architecture of modern mathematics: essays in history and philosophy*. Oxford University Press. 2006.

FREGE, G. *Collected papers on Mathematics, Logic and Philosophy* – edited by Brian McGuinness. Basil Blackwell Publisher. 1984.

__________. *Die Grundlagen der Arithmetik*. BRESLAU. Verlag von Wilhelm Koebner. 1884.

_________. *Philosophical Writings*, edited by Peter Geach. Basil Blackwell Publisher. 1960.

GABRIEL, G. *Frege and the German background to analytic philosophy*. In.: BEANEY, M. The Oxford handbook of the history of analytic philosophy. Oxford University Press. 2013. PP. 280-297.

GRATTAN-GUINNESS, I. *The search for Mathematical roots, 1870-1940*. Princeton University Press. 2000.

HECK JR., R. G. *The development of Arithmetic in Frege's "Grundgesetze der Arithmetik*". In.: The journal of Symbolic logic. Vol. 58, nº 2. 1993. 579-601.

HEIJENOORT, J. V. *Logic as calculus and logic as language*. Synthese, vol. 17. 1967. P. 324-330.

HEIS, J. *Arithmetic and number in the "Philosophy of Symbolic Forms*". In: FRIEDMAN, J. T. and LUFT, S. (Eds.) The Philosophy of Ernst Cassirer: a Novel Assessment. Books by Marquette University Faculty. Book 225, 2015. PP. 123-140.

________. "*Critical philosophy begins at the very point where logistic leaves off": Cassirer's Response to Frege and Russell.* Perspectives on Science, vol. 18, no. 4, by The Massachusetts Institute of Technology. 2010. P. 383-408.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura* [1ª Ed. 1781 – 2ª Ed. 1787] Lisboa: Fundação Calouste Gulbekian, 1994.

MATHERNE, S. *Cassirer's Psychology of Relations: From the Psychology of Mathematics and Natural Science to the Psychology of Culture*. In.: Journal for the history of analytical philosophy. Vol. 6, Nº 3. Special issue: Method, Science and Mathematics: Neo-Kantianism and analytical philosophy. Ed. Scott Edgar and Lydia Paton. University of Massachusetts. 2018. PP. 133-162.

OLIVA, L. *Kant and the Neo-Kantians on Mathematics*. In.: STAITI, A. and WARREN, N. (eds.) New approaches on Neo-Kantianism. Cambridge University Press. 2015. PP. 285-306.

PARSONS, C. *The struturalistic view of mathematical objects*. Synthese, 84. 1990. PP. 303-346.

PORTA, M. A G. *A teoria do número em Natorp e Cassirer (1898-1910). Uma contribuição histórica ao estruturalismo matemático e às origens do "semantic turn"*. P. 103-144. In. Idem. ESTUDOS NEOKANTIANOS. São Paulo: Loyola, 2011.

RECK, E. *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*. In.: Stanford Encyclopedia of Philosophy, (originally published in 2008, revised in 2011). PP. 1-32.

________. *Dedekind's structuralism: An interpretation and partial defense*. In.: Synthese, 137. 2003. PP. 369-419.

________. *Dedekind, structural reasoning, and mathematical understanding*', In.: VAN KERKHOVE, B. (ed.), New Perspectives on Mathematical Practices, Singapore: World Scientific. 2009. PP. 150-173.

________. *Frege or Dedekind? On their relation, reception, and revival*. In.: RECK, E. (ed.), The Historical Turn in Analytic Philosophy, London: Palgrave Macmillan. 2013, a. PP. 139-170.

________. *Frege, Dedekind and the origins of logicism*. In.: History and Philosophy of logic. Vol. 34, nº 3. 2013 b. PP. 242-265.

RECK, E. and KELLER, P. *From Dedekind to Cassirer: Logicism and the Kantian heritage.* (Forthcoming) In.: POSY, C. and RECHTER, O. Kant's philosophy of Mathematics, Vol. II: Reception and development after Kant. Cambridge University Press.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics* [1903]. Routledge. 2010.

SCHAPIRO, S. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press. 1997.

SCHIEMER, G. *Cassirer and the Structural Turn in Modern Geometry*. In.: Journal for the history of analytical philosophy. Vol. 6, Nº 3. Special issue: Method, Science and Mathematics: Neo-Kantianism and analytical philosophy. Ed. Scott Edgar and Lydia Paton. University of Massachusetts. 2018. PP. 182-212.

SMART, H. R. *Cassirer's Theorie of Mathematical concepts*. In.: SCHLIPP, P. A. The philosophy of Ernst Cassirer. The library of living philosophers. ILLINOIS 1949. PP. 239-268.

YAP. A. *Dedekind and Cassirer on Mathematical Concept Formation*. In.: Philosophia Mathematica, 2014. PP. 1-21.

______. *Logical structuralism and Benacerraf's problem*. In.: Syntese. Vol. 171. 2009. PP. 157-173.

______. *Predicativity and Structuralism in Dedekind's construction of the reals*. In.: Erkenn. Vol. 71. 2009. PP. 157-173.

Universidade Católica de Petrópolis
Centro de Teologia e Humanidades
Rua Benjamin Constant, 213 – Centro – Petrópolis
Tel: (24) 2244-4000
synesis@ucp.br
http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis

AMARAL, Lucas. A filosofia da matemática de Kant no (novo) tribunal da razão: alguns aspectos do anti-intuicionismo no século dezenove e uma variante neokantiana. **Synesis**, v. 12, n. 2, 2020. ISSN 1984-6754. Disponível em: http://seer.ucp.br/seer/index.php/synesis/article/view/2016