Synesis, v. 12, n. 1, p. 130-151, jan/jul 2020, ISSN 1984-6754

A LÓGICA MATEMÁTICA DE RUSSELL EM PRINCIPLES OF MATHEMATICS

RUSSELL'S MATHEMATICAL LOGIC IN PRINCIPLES OF MATHEMATICS*

MARCOS AMATUCCI **
ESCOLA SUPERIOR DE PROPAGANDA E MARKETING, BRASIL

Resumo: Livro que marca o início do projeto logicista de Russell, Principles of Mathematics é uma verdadeira cornucópia de ideias novas na Lógica, na Matemática e na análise da linguagem que dará origem à Filosofia Analítica. Embora o projeto logicista não tenha sobrevivido às suas dificuldades (mormente o problema do paradoxo e posteriormente o teorema de Gödel), o projeto desenvolveu grandemente a Lógica, agregando a ela a teoria dos conjuntos e a teoria das relações, ambas formalizadas em linguagem simbólica; ainda, é na lida com as dificuldades do projeto que Russell desenvolve sua teoria da denotação (esboçada neste livro e completada no artigo de 1905), que dá origem à Filosofia Analítica. Neste artigo discorremos sobre a formulação da lógica tripartite de Russell nesta sua primeira versão.

Palavras-chave: Bertrand Russell. Lógica. Principles of Mathematics. Projeto logicista. Filosofia Analítica.

Abstract: Book that marks the beginning of Russell's logicist project, Principles of Mathematics is a true cornucopia of new ideas in Logic, Mathematics and the analysis of language that will give rise to Analytical Philosophy. Although the logicist project did not survive its difficulties (mainly the problem of paradox and later Gödel's theorem), the project greatly developed Logic, adding to it the set theory and the theory of relations, both formalized in symbolic language; still, it is in dealing with the difficulties of the project that Russell develops his theory of denotation (outlined in this book and completed in the 1905 article), which gives rise to Analytical Philosophy. In this article we discuss the formulation of Russell's tripartite logic in his first version.

Keywords: Bertrand Russell. Logic. Principles of Mathematics. Logicist project. Analytical Philosophy.

---

* Artigo recebido em 21/09/2020 e aprovado para publicação pelo Conselho Editorial em 17/10/2020.
** Doutor em Administração pela Universidade de São Paulo, Brasil. Doutor em Filosofia pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Professor Titular do Programa de Doutorado em Administração da ESPM de São Paulo. Lattes: http://lattes.cnpq.br/2538668989160393. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4658-0779. E-mail: marcosamatucci@gmail.com

I. INTRODUÇÃO

Russell em Frege, trabalhando separadamente, procuraram desenvolver uma fundamentação lógica para a Matemática, projeto que ficou conhecido como logicismo. De uma forma bastante simplificada, o logicismo surge na necessidade de fundamentação da Matemática e da Geometria, uma vez que o surgimento de novas geometrias colocou em xeque as justificações kantianas para ambas, em termos de intuições puras de tempo e de espaço.

Do lado de Russell, seu trabalho nasce de sua tentativa ainda hegeliana de desenvolver uma "Enciclopedia dialética das ciências". Este seu projeto da juventude, também conhecido por "projeto Tiergarten", hoje nos está disponível na forma de manuscritos, coligidos pela Universidade McMaster de Toronto, e contidos nos 22 volumes da série *The Collected Papers of Bertrand Russell.*

Durante este período, Russell debruçava-se sobre os problemas da matemática como o da formação do conceito de número, e também dos da geometria, como a contradição unicidade e multiplicidade do ponto, dentre outros. A maior parte dos textos que compõem o Principles of Mathematics (PoM) publicado é oriundo desta fase; e também é destes estudos que nasce o material para sua dissertação de fellowship em Cambridge, sobre as novas geometrias, posteriormente bastante modificado e publicado sob o título de Essay on the Foundations of Geometry (Ensaios sobre a Fundamentação da Geometria).

Embora o projeto logicista tenha falhado tendo em vista primeiro a impossibilidade de se eliminar os paradoxos ("o" Paradoxo de Russell principalmente, mas este se manifesta de muitas maneiras diferentes conforme a formulação e os contornos que Russell oferece ao problema); e segundo, o teorema da incompletude de Gödel, que afirmará que todo sistema lógico ou é completo ou é consistente, não podendo ser ambos ao mesmo tempo; o que esfriou os ânimos do projeto de fundamentação da Matemática pela Lógica pelo menos por algum tempo.

Não obstante, o projeto logicista é profundamente fecundo em termos do desenvolvimento da Lógica ela mesma (a própria descoberta dos paradoxos é que leva ao teorema de Gödel e outros desenvolvimentos, como o reconhecimento da importância de outras lógicas como por exemplo a lógica paraconsistente).

Nesta primeira tentativa de Russell em PoM, a real dimensão do problema dos paradoxos ainda não estava clara; Russell acreditava poder eliminar a dificuldade com algum trabalho – trabalho que acabou por lhe tomar, a ele e a Whitehead, dez anos para a produção dos três volumes do Principia, e no qual a solução adotada – a teoria dos tipos – é duramente criticada por Wittgenstein no Tractatus.

Assim, a sua primeira formulação de uma lógica para embasar a Matemática pode parecer ingênua. Porém veremos pela primeira vez (à parte do trabalho de Frege, ainda desconhecido por Russell), dois desenvolvimentos importantes: uma teoria de conjuntos formalizada, e uma teoria das relações formalizada. Da primeira Russell tira a noção de número, e a segunda resultará na teoria da denotação (já rascunhada em PoM), teoria que, publicada em On Denoting em 1905, só será seriamente criticada por Kripke 60 anos depois.

Esses desenvolvimentos tornam a formulação da Lógica em Principles uma peça importante na história da Lógica e da Filosofia Analítica.

2. O QUE É MATEMÁTICA PURA PARA RUSSELL

Comecemos com o que é matemática para ele; em particular, o que é matemática "pura". Aqui o adjetivo não se contrapõe principalmente a "aplicada" (embora obviamente o faça) como em outros livros de matemática (conforme veremos) mas sim ao que chamaremos de "modelos" da matemática pura[1].

Se tomarmos, por exemplo, o livro *A Course in Pure Mathematics* de G. H. Hardy [7] (contemporâneo de Russell no Trinity College), veremos que o livro inicia-se diretamente com a definição de números racionais: "...Uma fração r = p/q, onde p e q são inteiros positivos ou negativos, é chamada um número racional." (p. 1). O livro de Hardy aqui é tomado como um exemplo do que Russell chama de "matemática usual" [2]. Compare-se aquele primeiro parágrafo com o primeiro parágrafo de PoM:

[1] Num paralelo com o sentido lógico de "modelo", isto é, uma *interpretação* de um sistema axiomático.

[2] Hardy foi aqui tomado como exemplo de "matemática usual" e contraponto do sentido matemático usual de "matemática pura" ao sentido atribuído por Russell a esta expressão, por dois motivos: por ser um contemporâneo e colega de Russell, por explicitar o termo "matemática pura" em seu livro, e por ser referência na matemática. Não obstante, qualquer livro moderno de matemática "pura" iniciará sua jornada já com a definição de números reais (ou inteiros, racionais, irracionais e então reais), tomando estes como os objetos de sua disciplina, ou seja, será uma interpretação ou modelo do sistema mais geral de "matemática pura" de Russell. Veja-se por exemplo Bloch [17], Belding e Mitchell [18] ou Kaplan [19]. Este último refere-se a Hardy como exemplo de "...*trabalhos mais avançados*" (p.14) e já começa com as propriedades dos reais. Bloch refere-se aos postulados de Peano, mas sempre considerando os objetos como "números"; Belding e Mitchell mostram a construção dos reais de Dedekind, mas seus objetos também são números.

> Matemática pura é a classe de todas as proposições da forma 'p implica q' onde p e q são proposições contendo ou mais variáveis, as mesmas nas duas proposições, e nem p nem q contém nenhuma (any) constantes exceto constantes lógicas. " (PoM §1)

A definição acima, de matemática pura como uma classe de proposições que contém uma implicação e contém variáveis e não contém constantes outras que não as lógicas, coloca a matemática pura russelliana num grau de generalização superior (na verdade dois graus) àquele que usualmente considera-se que a matemática possua. É uma definição que passou pelo processo de análise russelliana descrita mais adiante.

A utilização da implicação formal (vide discussão mais adiante) na definição de matemática pura tem para Russell a vantagem adicional de se considerar todas as afirmações da matemática como hipotéticas, independendo portanto da existência dos respectivos objetos.

> Nós afirmamos sempre em matemática que se uma certa afirmação p é verdade de qualquer entidade, ou de qualquer conjunto de entidades x, y, z, ... então alguma outra afirmação q é verdade para aquelas entidades; mas não afirmamos tanto p quanto q separadamente de nossas entidades. Nós afirmamos uma relação entre as afirmações p e q, a qual eu chamarei de implicação formal. (PoM § 5).

Russell chega a essa generalização por substituições consecutivas de constantes por variáveis. Por exemplo, na implicação se Sócrates é grego então Sócrates é homem, uma primeira substituição nos traz se x é grego então x é homem. Individualmente, a veracidade destas funções proposicionais dependerá dos valores de x; a implicação, não obstante, é sempre verdadeira para qualquer valor de x; entretanto ainda depende de constantes não lógicas como "grego" e "homem" (sobre o problema desta implicação formal veja nosso próximo tópico). A mesma implicação com outras constantes pode não funcionar. Não é uma implicação formal. A matemática pura requer uma segunda generalização: no exemplo de Russell, se a e b são classes, e a está contido em b, se x é a então x é b. Agora temos apenas variáveis, e as constantes lógicas: "classe", "está contido em" e "implica" (embutido na estrutura "se... então").

Esta última proposição é um tipo de proposição da matemática pura, isto é, representa uma classe de relação entre variáveis que, neste momento do desenvolvimento da filosófica de Russell, assumem irrestritamente qualquer tipo de valor. A matemática pura está interessada apenas em tipos de proposição, que refletem classes de relações entre variáveis.

A Aritmética por exemplo trabalha com números e estes mantêm entre si determinados tipos de relações. Então, por exemplo,

x é número ∧ y é número .⊃. $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

mas a veracidade da implicação que constitui a classe de proposições da matemática pura é garantida mesmo que x e y não sejam números (desde que as operações de "+" e "." sejam convenientemente definidas para outras interpretações, no que Russell afirma não haver dificuldade).

Assim, cada ramo da matemática lida com classes de entidades que compartilham relações de um mesmo tipo. E um tipo de relação significa *uma classe de relações* "*caracterizada pela identidade formal acima das deduções possíveis em relação aos vários membros da classe*..." (PoM §8). E um tipo de relações é definível com constantes apenas lógicas (uma vez que se acrescente à lógica "usual" o cálculo de classes e o cálculo de relações.

Russell coloca desta maneira os ramos da matemática como "modelos" ou interpretações de tipos de relações. Por exemplo, a geometria euclidiana e os números complexos compartilham as mesmas classes de relações, generalizáveis em proposições da matemática pura, constituindo assim interpretações desta. As interpretações ou ramos da matemática consistem em restrições aos tipos de variáveis da matemática pura, e iniciam-se com uma hipótese adicional como "S é um espaço euclidiano" (ou na forma construtiva, "Seja S um espaço..."). Esta definição claramente se aplica à matemática pura de Hardy (ou o que Russell chama de a "matemática usual"): ela é portanto uma interpretação ou modelo da matemática pura russelliana.

A matemática "aplicada" para Russell, como na tradição da Física dos Séculos XVII e XVIII, é aquela cujas constantes são provenientes do mundo real, e devem portanto ser empiricamente determinadas.

Com esta construção Russell remete os indefiníveis, as premissas e as proposições indemonstráveis da matemática para a Lógica, fazendo a primeira ser passível de ser obtida da segunda pelas regras de dedução desenvolvidas por Peano.

Russell "salva" a matemática dos indefiníveis e das demais dificuldades, trazendo a luta para o terreno da lógica, onde pretende travar sua batalha antes de voltar triunfante para a redefinição dos termos da matemática. É o mesmo método analítico que Russell para as proposições e que Hager [8] afirma ser a unidade no pensamento russeliano, através de todas as suas fases[3].

Mas antes disso, pode-se observar, a própria definição de matemática de Russell já passou pelo processo de análise lógica descrito por Hager para a análise de proposições: o método é o mesmo para a análise de sistemas mais complexos como a matemática e a lógica. Da matemática "acrítica" ("usual") dos manuais escritos por matemáticos, Russell chega a uma definição de matemática reconstruída e descrita em estruturas puramente lógicas: proposições e a relação de implicação formal.

3. O QUE É LÓGICA SIMBÓLICA (OU FORMAL) PARA RUSSELL

Russell define a lógica formal ou simbólica em PoM como "o estudo dos vários tipos gerais de dedução" (§11 p. 10), e a divide em três partes, cada uma com seus indefiníveis e axiomas: o cálculo de proposições, o cálculo de classes e o cálculo de relações. As duas últimas partes apoiam-se na construção da primeira, que conta com dez axiomas. Tendo em vista estes, e o fato de Russell considerar o cálculo de proposições primitivo em relação aos outros dois, o número de axiomas destes é reduzido.

Como indefiníveis essências aos três cálculos Russell estabelece primeiramente a noção de implicação e implicação formal. Os dois tipos de implicação são os únicos indefiníveis (ou o único indefinível que se apresenta em dois tipos) do cálculo de proposições. Tal colocará complexidades e dificuldades em alguns dos axiomas, mas torna o sistema bastante elegante.

Em seguida implicação entre proposições que não contém variáveis, a relação entre um termo e a classe de que é membro, a noção de tal que (*such that*), a noção de relação, e verdade. Todas as afirmações da lógica simbólica podem ser postas por estes princípios.

A primeira e mais fundamental, desde a definição de matemática pura, para o constructo lógico de Russell, é a noção de implicação, material e formal, e em particular a

---

[3] Hager descreve o processo de análise de Russell através de um modelo de três fases: primeiro, parte-se de "*resultados não-analisados*", que são proposições "brutas" (isto é, não criticamente analisadas) que relacionam objetos do senso comum entre si ou com suas propriedades; segundo, a análise lógica volta-se criticamente para as premissas da proposição, por um processo de inferência, descrevendo particulares, propriedades e relações; e terceiro, a síntese lógica retorna ao (agora analisados) resultados, reconstruindo a proposição original em estruturas puramente lógicas. Hager [8] p. 26. Observo aqui que o processo é o mesmo para a análise da matemática: Russell parte da matemática acrítica ou "usual" como chama, volta para seus pressupostos e reconstrói a definição em termos de estruturas lógicas: proposições e a relação de implicação formal.

segunda. Enquanto outros autores consideram indiferente quais as noções primitivas com as quais se constrói um sistema de lógica, sendo a escolha dos primitivos dos quais se inferirá todo o sistema mais ou menos arbitrária, e sistemas diferentemente definidos como equivalentes.

Em Russell não há tal indiferença. Russell tem uma justificativa filosófica para considerar a implicação como relação primitiva e indefinível, e derivar as demais a partir dela: pois para ele a implicação está na base de toda a inferência válida.

> Mas é claro que onde nós inferirmos de maneira válida uma proposição de outra, nós o fazemos em virtude de uma relação que se mantém (holds) entre as duas proposições, quer percebamos ou não (...). A relação em virtude da qual é possível para nós inferir de uma maneira válida eu chamo de implicação material. (PoM § 37)

Então o raciocínio lógico válido, e com ele o matemático, depende de implicações formais.

As definições de implicação material e implicação formal são discutidas na seção a seguir. Russell distingue as duas e utiliza em PoM o termo "*implica*" para a primeira e a construção "se... então..." para a segunda[4].

Implicação material e implicação formal

Comecemos pela implicação material. Para Russell, existe uma relação entre quaisquer duas proposições[5] que se mantém verdadeira sempre que a primeira for falsa ou a segunda for verdadeira. Russell compara esta relação com a relação de "menor ou igual" entre comprimentos de uma classe de comprimentos de uma ou duas polegadas[6].

O fato da relação ocorrer entre proposições e somente entre elas permite que Russell se utilize da expressão $p \supset p$ como premissa de outras implicações (por exemplo, implicações formais) para garantir a um tempo que as variáveis de p possa variar sem restrições (como ainda pretende Russell em PoM), de um lado, e, de outro, que uma proposição complexa que contenha aquela premissa ainda seja uma proposição válida, mesmo que falsa. Como

[4] Neste estudo, sempre que utilizarmos notação simbólica, "$\supset$" será o "implica" de Russell (ou seja, implicação material), e "$\supset_x$" (implica para todo x) será o "se...então" de Russell ou a implicação formal.
[5] Mas somente entre proposições; isto é, os relata da relação devem ser proposições completas.
[6] Teríamos neste exemplo uma tabela-verdade similar à da implicação material: $2 \leq 2$ (V); $2 \leq 1$ (F); $1 \leq 2$ (V) e $1 \leq 1$ (V).

somente proposições podem implicar ou serem implicadas (são dois dos dez axiomas do cálculo de proposições de Russell), p ⊃ p garante que p seja uma proposição.

Russell ressalta as dificuldades psicológicas de se aceitar esta relação, mas afirma que ela existe quer nos pareça familiar ou não. Ela está na base das inferências (por exemplo, nas deduções euclidianas), não podendo entretanto ser confundida com a noção de "portanto" (*therefore*): esta é válida para diferentes entidades. A primeira refere-se a proposições afirmadas como verdadeiras (*asserted*); enquanto que "implica" refere-se a relações apenas hipoteticamente consideradas.

À objeção de que uma inferência usualmente necessita de mais de uma premissa, Russell afirma que qualquer número de proposições afirmadas simultaneamente constituem uma única proposição e podem ser tratadas como tal. Esta observação também é importante para a compreensão de detalhes da notação russelliana como veremos na implicação formal.

Em suma, a relação de implicação é uma relação entre duas proposições que é hipotética (isto é, quando se afirma a implicação não se afirma a proposição antecedente ou a consequente isoladamente), "objetiva" (isto é, não depende de que a percebamos) que se manterá sempre que a primeira proposição for falsa ou a segunda verdadeira.

Passemos à implicação formal, onde estas premissas são fundamentais, pois procura-se uma implicação que seja verdadeira sempre. Russell utiliza "*se...então...*" para a implicação formal e "implica" para a implicação material. Usualmente tal distinção de notação não é feita em livros de lógica[7]. Assim, a proposição complexa "se x implica y e y implica z então x implica z" é composta por três implicações materiais e uma implicação formal.

O conjunto de premissas verdadeiras de uma inferência pode ser representada por uma classe k cujas proposições devem ser todas verdadeiras se quisermos prosseguir com

[7] Cf. p. ex.: Mendelson [20], que justifica a tabela-verdade da implicação pelo fato de querermos que A.B⊃B seja verdade sempre (compare-se com p ε k ⊃ p, se |k|=2); Shoenfield [9] só fala de implicação, que define como ¬A∨B; Hodel [21], Kleene [22] e Tarski [23] explicitamente identificam as duas formas (material e formal), mas não extraem daí consequências para a notação. Quando alguma distinção é assinalada, esta é utilizada para discutir a diferença entre a implicação lógica e a sentença condicional na linguagem comum (*implicatura conversacional*, onde se exigiria uma "coerência" entre as proposições da implicação cf. DeLong [24] e Haack [25]). Tarski, DeLong e o próprio Russell rejeitam as críticas oriundas da linguagem comum às sentenças condicionais lógicas. O primeiro afirma que a linguagem comum não contém sentenças com sentido determinado e preciso. O segundo argumenta que nenhuma outra função aproxima-se tanto do que a linguagem comum ou o estado de coisas representam por "se...então...". Russell argumenta que se confunde, a esse respeito, "implica" com "portanto", quando este último indica um raciocínio conclusivo e o primeiro simplesmente reflete uma relação entre duas proposições, que existe sempre que a primeira for falsa ou a segunda for verdadeira.

nossa inferência válida. A maneira de se garantir isto é estabelecer a condição p ε k ⊃ p ([8]), precedida pela condição exposta acima de que p deve ser uma proposição. Então a formulação completa seria

$p \supset p \,.\, \supset_p : p\ \varepsilon\ k \,.\!\supset\!.\, p$

Russell considera a implicação formal um dos indefiníveis da lógica simbólica; e portanto não oferecerá dela uma "definição". Oferece, ao invés disto, uma longa discussão e uma explicação sintética no sumário do capítulo capítulo III de PoM.

> Para o estudo técnico da Lógica Simbólica é conveniente tomar como único indefinível a noção de implicação formal, i.e., daquelas proposições como 'x é homem implica x é mortal para todos os valores de x' – proposições cujo tipo geral é: 'ϕ(x) implica ψ(x) para todos os valores de x' onde ϕ(x), ψ(x), para todos os valores de x, são proposições. PoM §12 p. 11.

A implicação formal portanto só é explicada de uma forma sintética depois que os problemas da implicação são discutidos, e o indefinível "todo" (every), ao lado do conceito de asserção, são estabelecidos. Vamos começar de trás para a frente.

> Para sumarizar nossa discussão de implicação formal: uma implicação formal, dissemos, é a afirmação de toda (every) implicação material de uma certa classe; e a classe de implicações materiais envolvidas é, nos casos simples, a classe de todas as proposições nas quais uma dada asserção fixa, feita a respeito de um certo sujeito ou sujeitos, é afirmada para implicar o mesmo sujeito ou sujeitos. PoM §45 p. 41.

A implicação formal conforme discutida por Russell em PoM é:

a) Uma relação entre uma função proposicional antecedente e uma função proposicional consequente. Isto significa que é bastante diferente de uma implicação material, pois esta só pode ser verdadeira se ocorrer entre proposições, e uma função proposicional não é uma proposição (não pode ser valorada), mas define uma classe de proposições correspondente aos valores constantes que suas variáveis podem assumir.

b) É verdadeira sempre, para todos os valores das variáveis (todo termo – *every term*, vide abaixo), desde que, enfatiza Russell, que as variáveis assumam sempre os mesmos valores no antecedente e no consequente.

---

[8] Esta condição proíbe p de ser falso e pertencer a k sob pena da implicação ser falsa. Deve ainda, para cumprir com o fim a que se destina, ser complementada pela condição de p ser uma proposição (p ⊃ p). E.g. se |k|=2 (k só tem dois elementos), temos p.q ⊃ p e p.q ⊃ q.

c) As variáveis da implicação formal são chamadas por Russell de "*variáveis aparentes*", seguindo Peano. Peano chamava de aparentes as variáveis de cujo valor a veracidade da proposição independe. É o caso da implicação formal, que será verdadeira para quaisquer valores das variáveis das funções proposicionais. Russell compara as variáveis aparentes da implicação formal às variáveis de uma integral definida (PoM § 13)[9].

d) Afirma não uma proposição, mas uma classe de proposições verdadeiras, e, como seu valor verdade não depende das variáveis que contém, *é uma proposição*[10].

e) Mantém entre antecedente e consequente uma relação "mais forte que" a implicação material pois possui sempre uma outra relação em adição a esta.

> Isto parece mostrar que uma implicação formal envolve algo sobre e acima da relação de implicação [material], e que alguma relação adicional deve valer onde um termo pode ser variado. PoM §42 p. 39.

Esta relação adicional que torna a implicação formal "mais forte" pode ser por exemplo uma relação de inclusão de classe, como em "x é homem implica x é mortal"; ou, em outro exemplo, uma relação de ordem, como "A é antes de B implica B é depois de A". Na implicação formal, estas relações (de inclusão ou de ordenamento ou outras) sobrepõem-se à relação de implicação material. Na maior parte dos casos (mas não todos), afirma Russell, pode ser manejada com o conceito de asserção (vide mais abaixo).

f) Antecedente e consequente tem a mesma variável ou o mesmo conjunto de variáveis.

g) As variáveis das funções proposicionais são os sujeitos das proposições obtidas quando se substituem os valores das variáveis por constantes.

h) A parte da proposição assim obtida que não é o sujeito, isto é, o predicado mais o verbo, Russell denomina "asserção". A asserção em "Sócrates é homem" é "é homem". Tendo em vista isto e d) e e), a implicação formal contém duas asserções sobre o

[9] Russell quer dizer que uma integral definida como $\int_{x=n}^{m} f(x)dx$ será F(m)-F(n), que é um número constante, independentemente do valor de x. Por exemplo, se fizermos naquela integral $f(x) = 3x^2$, n=1 e m=5, teremos $F(x)=x^3$, F(m)=125, F(n)=1 e F(m)-F(n)=124, o qual é um número Real constante. A variável x só serve para o cálculo da primitiva (F) da função (*f*), depois ela desaparece. O leitor perceberá de pronto que a comparação de Russell é limitada; aqui a variável é de fato apenas uma conveniência de notação e de cálculo; lá ela é uma variável que realmente varia, e o fato da implicação formal ser verdadeira para qualquer valor desta variação é justamente o que torna útil e relevante a proposição que contém a implicação formal.

[10] Importante para a compreensão da proposição russelliana é o fato de que Russell proíbe apenas funções proposicionais de variáveis *reais* de serem proposições (pois seu valor verdade depende do valor da variável); funções proposicionais de variáveis *aparentes* são verdadeiras para quaisquer valores das variáveis e *portanto são proposições*.

mesmo sujeito ou os mesmos sujeitos. E esta é uma das relações gerais que se sobrepõem à relação de implicação material na implicação formal. Este caso inclui os dois exemplos em c).

i) É essencial à implicação formal que suas asserções valham para todo termo, conforme em b). Para Russell, isto demonstra que a noção de asserção, bem como a do indefinível todo termo (every term) são primitivas em relação a classe, e que portanto esta última não é adequada para explicar a implicação formal.

O cálculo de proposições

Além dos indefiníveis mencionados, o cálculo de proposições consiste de dez axiomas, a saber[11]:

1. $p \supset q \,.\!\supset_{p,q}.\, p \supset q$

(Lê-se "se p implica q então p implica q"). Isto significa que se p e q são proposições, a implicação material que os relaciona será uma proposição.

2. $p \supset q \,.\!\supset_{p,q}.\, p \supset p$

Isto é, se p implica alguma coisa, então p é uma proposição.

3. $p \supset q \,.\!\supset_{p,q}.\, q \supset q$

Isto é, se q é implicado por alguma coisa, q é uma proposição.

4. Uma hipótese verdadeira em uma implicação pode ser descartada, e a consequência afirmada[12] .

Russell introduz entre o quarto axioma e o quinto, a definição de uma afirmação conjunta de duas proposições (produto lógico de duas proposições ou conjunção):

(α) $[p\supset p \,.\!\supset\!.\, q\supset q :\supset.]\ pq =_{def.} p\supset(q\supset r) \,.\!\supset_{p,q,r}.$ r é verdadeira.

As implicações entre colchetes correspondem às premissas da definição, e estas são as de que p e q sejam proposições. "pq" é a notação de Russell para a afirmação conjunta (ou produto lógico) das proposições p e q; para frases mais longas utiliza o "∧". Note que a complicação da definição é o fardo que Russell carrega por ter escolhido a implicação como noção primitiva (e portanto não pode utilizar "e", por exemplo, como em "$p\supset p \wedge q\supset q$". Ao

[11] Optei por apresentar os axiomas em linguagem simbólica pelas vantagens de economia que ela oferece. Russell os apresenta em inglês, com o termo "implica" para implicação material e "se...então..." para implicação formal. Lembrando que $p \supset p$ significa que p é uma proposição; e que os termos que antecedem a implicação são antecedentes ou hipóteses, e o que a sucede são os consequentes.

[12] Russell afirma que este princípio não pode ser formalizado, mas corresponderia a um *modus ponens*: $p \supset q$; p .:. q; entretanto Russell ainda não axiomatizou o *silogismo* então não pode chama-lo assim.

invés disso já tem que afirmar o produto lógico entre as duas implicações, $p \supset p$ e $q \supset q$. A definição "$p \supset (q \supset r) . \supset . p,q,r$ r é verdadeira" equivale à afirmação "$p \, \varepsilon \, k . \supset . \, p$" como vimos acima, sem o uso de classes e da noção de relação membro-classe ("ε"), pois os axiomas do cálculo proposicional são primitivos ao cálculo de classes.

A partir desta definição, Russell pode utilizar o produto lógico, que equivale ao "e", e que escreveremos "∧" ou simplesmente as duas proposições justapostas (como "pq").

5. $p \supset p \wedge q \supset q . \supset_{p,q} . \, pq \supset p$

Este é o princípio da simplificação, e significa que a afirmação conjunta de duas proposições implica na primeira. Novamente, as duas primeiras implicações são premissas, e a implicação formal ($. \supset p,q.$) significa que o princípio é verdade sempre.

6. $p \supset q \wedge q \supset r . \supset_{p,q,r} . \, p \supset r$

Este é o axioma que garante o silogismo. As premissas são garantidas pelos axiomas (2.) e (3.), e pela definição de produto lógico: p, q e r são proposições.

7. $p \supset p \wedge q \supset q \, . \, \wedge . p \supset (q \supset r) : \supset_{p,q,r} . \, pq \supset r$

Este princípio Russell denomina importação. É a definição de produto lógico às avessas. Russell exemplifica da seguinte maneira: se eu chamar fulana então, se ela estiver em casa então serei admitido implica em se eu chamar fulana e ela estiver em casa então serei admitido.

8. $p \supset p \wedge q \supset q . \wedge . \, pq \supset r : \supset_{p,q,r} . \, p \supset (q \supset r)$

Princípio da exportação; é o axioma (7.) às avesas e equivale à definição (α).

9. $p \supset q \wedge p \supset r . \supset_{p,q,r} . \, p \supset qr$

Princípio da composição: a veracidade das duas implicações conjuntas de mesmo antecedente implica formalmente que este antecedente implica os dois consequentes conjuntamente.

10. $p \supset p \wedge q \supset q . \supset_{p,q} . \, [(p \supset q) \supset p) \supset p]$

Princípio da redução. Russell admite parecer menos auto-evidente que outros axiomas mas argumenta que equivale a outros axiomas auto-evidentes, e pode ser totalmente

Synesis, v. 12, n. 1, p. 130-151, jan/jul 2020, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

descrito através de implicações[13]. O axioma é necessário à definição de axiomas envolvendo negação[14].

Os demais operadores lógicos são derivados desses axiomas da seguinte maneira:

a) Disjunção ou adição lógica: p∨q =def. (p⊃q)⊃q

b) Negação: ¬p =def. r⊃r .⊃r. p⊃r . Isto é, a proposição falsa é aquela que implica qualquer outra, verdadeira ou falsa.

O cálculo de classes

Peano desenvolvera o cálculo de classes sobre dois indefiníveis, classe e relação de pertencimento (*membership*). Russell aceita o indefinível "ε", mantém a forma de ler de Peano: x ε k significa x é classe, ou pertence à classe das classes; "Sócrates ε homem" se lê "Sócrates é homem"; pertencer a uma classe é "ser" um membro da classe; contudo quer definir classe em seus próprios termos, observando que, embora o desenvolvimento de Peano seja filosoficamente mais correto, para efeito de cálculos formais necessita-se de um sistema mais convenientemente formalizado.

Russell assim parte de três indefiníveis para construir o cálculo de classes:

i. A noção de pertencimento;

ii. A noção de função proposicional; e

iii. A noção de tal que (such that).

A noção de pertencimento

A noção de pertencimento é tal qual definida por Peano, incluindo a simbologia e pronúncia. A relação entre Sócrates e a raça humana é expressa dizendo-se que Sócrates "é"

[13] Para compreendê-lo (não demonstrá-lo!!), Russell lembra que p⊃q equivale a q∨¬p e assim (p⊃q)⊃p equivale a (q∨¬p)⊃p ou p∨¬(q∨¬p) ou p∨¬q∧p) ou p. É apenas um recurso de compreensão pois, novamente, negação e disjunção não foram ainda definidas.

[14] "Sem o seu auxílio [do axioma 10], por meio dos demais nove princípios, podemos provar a lei da contradição; podemos provar, se p e q são proposições, que p implica não-não-p; que 'p implica não-q' é equivalente a 'q implica não-p' e 'não-pq'; que 'p implica q' implica 'não-q implica não-p"; que 'p implica que não-p implica p; que não-p é equivalente a 'p implica não-p'; e que 'p implica não-q' é equivalente a 'não-não-p implica não-q'. Mas não podemos provar a redução ou algum equivalente (...) que p ou não-p deve ser verdade (lei do terceiro excluído); que toda proposição é equivalente à negação de alguma outra proposição; que não-não-p implica p; que 'não 'q implica não-p' implica 'p implica q'; que 'não-p implica p' implica p, ou que 'p implica q' implica 'q ou não-p'. Cada um desses pressupostos é equivalente ao princípio da redução, e pode, se assim escolhermos, ser substituído por este. " PoM (§ 18).

(□) homem. Russell ainda atribui a Peano a importante distinção entre esta relação e a relação parte-todo. Sem prejuízo da distinção filosófica, há o problema formal de que esta última é uma relação transitiva, enquanto que a relação de pertencimento não é: Sócrates é homem; homem é classe; mas Sócrates não é classe. Tendo propriedades diferentes, as relações são distintas.

A função proposicional

A função proposicional é introduzida como uma proposição incompleta, que depende da definição do valor da variável para tornar-se uma proposição: ϕx é uma função proposicional se para cada valor de x, ϕx é uma proposição, determinada quando x é dado.

A noção de tal que

A noção de tal que é necessária para ligar os valores de x com a verdade da proposição: tal qual as raízes de uma equação, compara, existem valores de x "tais que" ϕx é verdadeira, e valores tais que a proposição é falsa.

A definição de classe

A partir destes três indefiníveis Russell define "classe": é o conjunto de valores de x tais que uma função proposicional é verdadeira. Com esta definição sobre os três indefiníveis, Russell pode contar com a classe vazia: é a classe que corresponde a uma função proposicional para as quais não há valores das variáveis que a tornem uma proposição verdadeira. Para tal classe Russell segue o símbolo de Peano, Λ.

Os axiomas do cálculo de classes

Seguem-se os axiomas, que são apenas dois: o primeiro afirma que se x pertence à classe de termos que satisfazem a função proposicional ϕx, então ϕx é verdadeira. O segundo afirma que se ϕx e ψx são proposições equivalentes para todos os valores de x, então a classe dos x tal que ϕx é verdadeira é idêntica à classe dos x tal que ψx é verdadeira.

A definição de identidade

Identidade conforme mencionada no segundo axioma é definida da seguinte maneira: x é idêntico a y se y pertence a todas as classes que x pertence: $x \equiv y =$def. $x \, \varepsilon \, u \supset u \; y \, \varepsilon \, u$.

Outras dificuldades e cuidados

Não obstante tenha conseguido construir o cálculo de classes de maneira elegante com três indefiníveis e dois axiomas, há dificuldades que devem ser discutidas e cuidados que devem ser tomados na consideração das classes, os quais demandam discussão. Vamos citar quatro deles:

a. Distinção entre classe e conceito de classe.
b. Definição intensional e definição extensional.
c. Distinção entre igualdade de classes e identidade de indivíduos.
d. Limitações no paralelismo entre cálculo de proposições e cálculo de classes.

Distinção entre classe e conceito de classe

Dois conceitos de classe (isto é, sua definição intensional) não são necessariamente idênticos quando sua extensão o é. Exemplos são “homem” e “bípede sem plumas”; ou “número primo par” e “inteiros entre 1 e 3”. Estas classes possuem a mesma extensão mas conceitos diferentes. Os axiomas e definições não lidam com os conceitos de classes, mas com as classes, isto é, com sua extensão.

Definição intensional e definição extensional

Os dois axiomas e a definição de identidade decidem em favor de uma definição extensional de classe. O cálculo de classes deve considerar os elementos da classe, e não sua definição intensional. Esta última atende ao conceito de classe. A consideração de classes de mesma extensão como distintas devido à sua definição intensional (como ocorre com os conceitos de classe) tornariam indefinidas grandezas importantes para a matemática, tais como o número de classes contida em determinada classe. “Se classes diferentes podem ter a mesma extensão, este problema torna-se completamente indeterminado. ” (PoM § 24).

Distinção entre igualdade de classes e identidade de indivíduos

Identidade é definida conforme acima, diz respeito à identidade de indivíduos ($x \equiv y =_{def.} x \, \varepsilon \, u \supset_u y \, \varepsilon \, u$); igualdade de classes é definida como mútua inclusão. A igualdade entre duas classes a e b é definida pela equivalência das proposições "x ε a" e "x ε b" para qualquer valor de x. Esta distinção é paralela à distinção entre um elemento e o conjunto unitário formado por este elemento, estabelecida por Peano.

Limitações do paralelismo entre cálculo de proposições e cálculo de classes

Grande parte das proposições do cálculo de classes pode ser obtida pela substituição das proposições p, q, r etc. do cálculo de proposições por proposições do tipo "x ε a" do cálculo de classes. Assim, o produto lógico de proposições, a soma de proposições, e a negação de uma proposição podem ser facilmente obtidos desta maneira:

a) O produto lógico de duas classes a e b pode ser obtido fazendo-se verdadeira a proposição "x ε a" ∧ "x ε b";

b) A soma lógica de duas classes a e b pode ser obtido fazendo-se verdadeira a proposição "x ε a" ∨ "x ε b";

c) A negação de uma classe pode ser obtida fazendo-se verdadeira a proposição ¬("x ε a")

d) A versão do cálculo de classes do silogismo ($p \supset q \wedge q \supset r \, .\!\supset_{p,q,r}. \, p \supset r$) pode ser obtida substituindo-se p, q e r por "x ε a", "x ε b" e "x ε c", respectivamente (exceto no quantificador):

"x ε a" ⊃ "x ε b" ∧ "x ε b" ⊃ "x ε c" $.\!\supset_{x,a,b,c.}$ "x ε a" ⊃ "x ε c"

Entretanto é necessário cuidado para evitar falácias nas implicações de disjunções, principalmente ao reconhecer quais implicações são materiais e quais são formais nas proposições complexas. Por exemplo,

(I) $(\phi x \wedge \psi x) \supset \chi x \, .\!\supset\! x. \, \phi x \supset \chi x \vee \psi x \supset \chi x$ (V) mas não

(II) $(\phi x \wedge \psi x) \supset \chi x \, .\!\supset\!. \, \phi x \supset_x \chi x \vee \psi x \supset_{x\chi x}$ (F)

Ou seja, a implicação .⊃x. em (I) é formal, mas as implicações disjuntas que se seguem a ela são materiais, isto é, dependem de x. Na (II), as implicações da disjunção são formais, o que é falso. Um exemplo similar é

(III) $\phi x \supset (\psi x \vee \chi x) .\supset_{x.} \phi x \supset \psi x \vee \phi x \supset \chi x$ (V) mas não

(IV) $\phi x \supset (\psi x \vee \chi x) .\supset. \phi x .\supset_x. \psi x \vee \phi x .\supset_x. \chi x$ (F)

Por exemplo (de Russell), em III e IV, ser inglês implica em ser homem ou ser mulher implica para todo inglês que ser inglês implica ser homem ou ser inglês implica ser mulher, mas a proposição ser inglês significa ser homem para todo inglês tanto quanto ser inglês significa ser mulher para todo inglês são proposições falsas, pois tomaram-se implicações materiais por formais.

Russell conclui que as disjunções entre funções proposicionais do cálculo proposicional só podem ser transpostas ipsis literis para o cálculo de classes quando as disjunções forem constantes, isto é, as variáveis são aparentes e a implicação é formal.

Novas operações introduzidas pelo cálculo de classes

Duas novas operações são introduzidas pelo cálculo de classes, o produto lógico e a soma lógica “internos” a uma classe, isto é, produto e soma em classes de classes.

Se k é uma classe de classes, seu produto lógico é a classe dos indivíduos que estão contidos em todas as classes de k: a classe dos termos x tal que “u ε k” $\supset_x$ “x ε u”. Sua soma lógica é de formalização não evidente mas corresponde ao moderno conceito de “união” das classes da classe k: é a classe dos termos x tal que “u ε k” $\supset_u$ “u ε c” $.\supset_x.$ “x ε c”. Isto significa que se c é a classe que une todas as classes u de k, x está em c. Aqui Russell tem que definir o “está contido” (que representamos em nosso texto com uma certa liberdade através do próprio ε entre duas classes):

a classe a ε b se “x ε a” $\supset_x$ “x ε b”.

Existência de uma classe

A existência formal de uma classe é em PoM definida de maneira diferente da discussão de existência na Filosofia. Uma classe k é dita existir quando possui pelo menos um elemento, isto é, quando a soma lógica das proposições x ε k não é falsa.

O cálculo de relações

Preâmbulo

Russell anota em PoM que o cálculo de relações é mais novo do que as demais partes da lógica, tendo sido trabalhado por De Morgan, Schröder e Peirce, principalmente este último; os quais porém utilizaram a notação de Boole, o que tornou o desenvolvimento posterior muito dificultoso ("praticamente inviável"). A definição de Peirce considera uma relação como uma classe de duplas, prevenindo o desenvolvimento de relações mais genéricas entre n-uplas de termos. Pensa Russell que isto se deve à consideração de proposições relacionais menos primitivas do que proposições de classe, "ou proposições do tipo sujeito-predicado" com as quais as proposições de classe são confundidas".

O cálculo

Se R é uma relação, xRy é a função proposicional "x mantém a relação R com y". O cálculo proposicional é portanto primitivo em relação ao cálculo de relações.

Este cálculo é composto pelas seguintes proposições:

1. xRy é uma proposição para todos os valores de x e y;
2. A definição de igualdade ou equivalência de relações;
3. Cada relação xRy tem uma inversa yR'x;
4. Entre quaisquer dois termos há uma relação R que não é válida para nenhum outro par de termos.

A proposição 2 é derivada do cálculo de classes; as demais são primitivas.

Necessita ainda de três pressupostos:

5. Em 4., R é necessariamente uma relação.
6. A negação de uma relação é uma relação.

A partir destes princípios define duas operações:

7. O produto lógico de uma classe de relações;
8. O produto relativo de duas relações.

As afirmações 1 a 8 são explicitadas a seguir.

1. O cálculo de relações requer uma proposição primitiva indemonstrável: que xRy é uma proposição para todos os valores de x e de y. Como Russell anteriormente afirma claramente que uma função proposicional, isto é, uma sentença com variáveis não é uma proposição até que se atribua um valor constante a cada uma das variáveis, só podemos concluir aqui que a relação tornar-se-á uma proposição assim que se atribuir valores a x e a y; a proposição primitiva indemonstrável garante que então, em qualquer caso, teremos uma proposição.

A relação xRy define duas classes: a classe dos referentes, que é a classe de todos os x que mantém a relação R com y; e a classe dos relata, que é a classe de todos os y com os quais x mantém a relação R. Por exemplo, se R for paternidade, a classe dos referentes serão os pais e a classe dos relata serão os filhos. Dentro das classes gerais definidas pelos referentes e pelos relata há classes particulares como os pais de fulano ou os filhos de pais londrinos etc. Um elemento real pode estar nas duas classes mas não na mesma relação.

A observação mais importante sobre esta definição de relação é a de que, ao contrário do cálculo de classes, onde Russell adota uma visão extensional, aqui a definição é intensional. Isto ocorre porque o critério de identidade de classes é diferente do critério de identidade de relações: duas classes com mesma extensão têm necessariamente que ser idênticas; mas duas relações com a mesma extensão podem ser diferentes. Então a definição intensional é que irá definir a relação, e não sua extensão.

2. Duas relações R e R' são iguais ou equivalentes, ou têm a mesma extensão, quando uma é implicada pela outra: xRy .⊃. xR'y ∧ xR'y .⊃. xRy (hoje escreveríamos xRy ⇔ xR'y). Note-se que igualdade ou equivalência não são o mesmo que identidade. Pode-se dispensar uma proposição primitiva para garantir este fato pois a igualdade de extensão apoia-se no cálculo de classes, o qual já possui uma proposição primitiva sobre equivalência de extensões.

3. Uma proposição primitiva importante para a Matemática é a de que cada relação R tem uma relação inversa R' tal que xRy é equivalente a yR'x. Exemplos de relações inversas são: maior que e menor que; antes e depois; implica e é implicado; está à direita e

está à esquerda. Relações simétricas são aquelas que são idênticas à sua inversa: por exemplo, identidade; igualdade; diversidade; desigualdade. Se isto não ocorres a relação é assimétrica. Casos intermediários (como menor ou igual) são chamados não-simétricos.

4. A proposição primitiva mais importante é a de que entre quaisquer dois termos existe uma relação que não é válida para nenhum outro par de termos. Tal é análogo ao princípio de que qualquer termo é o único membro de alguma classe. No cálculo de classes, contudo, ele pode ser provado devido á abordagem extensional; aqui Russell afirma desconhecer qualquer prova, mas não afirma ser indemonstrável. Russell considerará entretanto que para qualquer par de termos, uma proposição será verdadeira para eles e não o será para qualquer outro par de termos. Este princípio afirma que o produto lógico de todas as relações válidas entre um dado par de termos é uma relação única entre eles. Isto é,

$xR1y \wedge xR2y \wedge xR3y \wedge \ldots xR^ny \supset xRy$, sendo esta única.

Tal equivale a afirmar que: $xRy .\supset. x'Ry' :\supset. x=x' \wedge y=y'$ (para esta relação R única entre um par de termos).

5. Este princípio pressupõe que R seja uma relação (R não pode ser "Sócrates, o número 2 ou um pudim de ameixa").

6. A negação de uma relação é uma relação: $\neg xRy .\supset. xSy$ para alguma relação S.

7. O produto lógico de uma classe de relações é uma relação que segue uma definição como a utilizada em 4.:

$xRy =_{def.} xR^1y \wedge xR^2y \wedge xR^3y \wedge \ldots xR^ny$

O produto relativo de duas relações R e S é a relação válida entre x e z sempre que existir um termo y com o qual x tem a relação R e com o qual z tem a relação S:

$xR.Sz =_{def.} xRy \wedge ySz$

Synesis, v. 12, n. 1, p. 130-151, jan/jul 2020, ISSN 1984-6754

Assim a relação avô materno com seu neto é o produto relativo da paternidade do avô com a mãe com a maternidade da mãe com o filho. Assim o produto relativo não é comutativo nem tautológico. Não sendo tautológico permite uma potenciação de relações: por exemplo, o quadrado da relação de pai-filho é a relação de avô-neto, e assim por diante.

4. CONSIDERAÇÕES DO CÁLCULO DE RELAÇÕES PARA A FUNDAMENTAÇÃO DA MATEMÁTICA

A Matemática requer ainda duas proposições primitivas: 1. a implicação material é uma relação; e 2. a relação de um termo para com sua classe (ε) é uma relação.

Outras relações importantes para a Matemática que Russell não conseguiu demonstrar, mas que não tem certeza de que sejam indemonstráveis são a) se u e v são duas classes quaisquer existe uma relação R entre dois termos x e y que equivale à afirmação de que x ε u e y ε v; b) se u é uma classe qualquer não nula, existe uma relação R que todos os termos tem com ela (i.e., todos os elementos de u têm com u) e que não vale para nenhum outro par de termos; c) Se R é uma relação qualquer e u é uma classe contida na classe de referentes de R, então existe uma relação S que u tem com a classe de referentes, e é equivalente a R para aquela extensão. É a mesma relação R com um domínio (classe dos referentes) mais restrito.

Russell acreditava em 1903 poder com os três cálculos e essas proposições adicionais fundamentar toda a Matemática – a menos da contradição que encontrou pouco antes, e que neste momento acreditava ser uma dificuldade superável. Daqui para diante, o cálculo de relações desenvolve-se de maneira mais técnica para ramos especiais da Matemática.

Universidade Católica de Petrópolis
Centro de Teologia e Humanidades
Rua Benjamin Constant, 213 – Centro – Petrópolis
Tel: (24) 2244-4000
synesis@ucp.br
http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis

AMATUCCI, Marcos. A lógica matemática de Russell em Principles of Mathematics. **Synesis**, v. 12, n. 1, jul. 2020. ISSN 1984-6754. Disponível em: http://seer.ucp.br/seer/index.php/synesis/article/view/2006