

RECONSTRUÇÃO 3D DE IMAGENS TOMOGRÁFICAS COM O ALGORITMO EM+TV

Joel S. Dominguez*, **Joaquim T. de Assis** e **Jose R. C. Pessoa**

Departamento de Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 28.625-570, RJ, Brasil

Palavras-chave: Reconstrução de imagens, Algoritmo EM+TV, Tomografia computadorizada.

Resumo. Este artigo apresenta o algoritmo de máxima expectativa e variação total (EM+TV), como uma opção viável para reconstrução 3D de imagens tomográficas a partir de poucos dados iniciais, que podem ser incompletos e ruidosos. São reconstruídos volumes do *phantom* SheepLogan e um *phantom* de figuras geométricas para testar o algoritmo. Inicialmente, os elevados tempos de execução do algoritmo dificultavam a execução dos testes. Após ser otimizado e compilado com diretivas de otimização nível 3 seus tempos de execução foram diminuídos.

Endereços de e-mail: joel.iprj@gmail.com*, joaquim.iprj@gmail.com, jrenatopessoa@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

A tomografia computadorizada (TC) é uma técnica que permite a avaliação não destrutiva de estruturas internas de objetos, produzindo imagens de suas secções transversais. A TC é amplamente aceita pela medicina e com numerosas aplicações em diversas áreas da ciência. A pesquisa científica, nesta área, pode ser analisada como um processo de duas etapas: exploração das amostras e reconstrução das imagens [2]. A exploração das amostras consiste em irradiar o corpo, em diferentes direções, gerando um conjunto de imagens bidimensionais ou radiografias da amostra. Então, o processo de reconstrução de imagens tomográficas processa o conjunto de radiografias para gerar uma imagem tridimensional do interior do objeto em estudo, usando um algoritmo de reconstrução de imagens. Os métodos de reconstrução de imagens podem ser divididos basicamente em duas classes: métodos iterativos e métodos analíticos.

Os métodos iterativos iniciam-se com uma estimativa sobre como é o objeto. Depois se compara esta estimativa com as medidas obtidas, e ela é, então, modificada. Este processo é repetido várias vezes, até que a suposta imagem esteja de acordo com os dados obtidos, dentro de uma tolerância definida inicialmente. Nos métodos analíticos, trata-se o objeto a ser reconstruído e o conjunto de radiografias como funções integráveis. Deste modo, o problema de reconstrução é tratado em termos de equações integrais.

Em geral os algoritmos analíticos são mais compactos e exigem menos processamento de dados que os iterativos, o que os torna mais rápidos. Eles são, atualmente, os métodos mais utilizados em TC [4]. No entanto os métodos iterativos oferecem algumas vantagens como conseguir resultados similares aos analíticos partindo de dados iniciais incompletos ou ruidosos.

O algoritmo de máxima expectativa e variação total (EM+TV) é um método iterativo para reconstrução de imagens tomográficas que consegue reconstruir imagens tomográficas de boa qualidade com só umas poucas projeções ou radiografias. Ele foi publicado recentemente [10] como uma alternativa aos métodos analíticos tradicionais baseados em retroprojeção filtrada. No presente trabalho, é testada uma implementação computacional do algoritmo EM+TV reconstruindo cortes axiais de volumes de diferentes tamanhos e medidos os tempos de execução do algoritmo.

Na seção 2 é apresentado brevemente o algoritmo EM+TV; e nas seções 3 e 4 são apresentados respectivamente os resultados obtidos e as conclusões e trabalhos futuros.

2 ALGORITMO EM+TV

O algoritmo EM+TV é um algoritmo iterativo para reconstrução de imagens tomográficas com pouca sensibilidade ao ruído e flexibilidade. Os dados podem ser coletados a partir de qualquer conjunto de linhas; suas projeções não precisam ser com ângulos uniformemente distribuídos podendo ser incompletas. Neste trabalho, para reconstruir as fatias dos volumes foram usadas 36 projeções ou radiografias. Considerando que os algoritmos tradicionais baseados em retroprojeção filtrada precisam na ordem de 360 projeções, o algoritmo EM+TV mostra um importante ganho em diminuir os tempos de exploração e a exposição à radiação das amostras ou corpos a serem tomografados. A seguir, apresenta-se uma breve descrição matemática do algoritmo [10].

Muitos dos algoritmos iterativos para reconstrução de imagens são baseados em sistemas de equações lineares do tipo:

$$Ax = b \tag{1}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$ é um vetor que representa a imagem original desconhecida, o vetor $b = (b_1, \dots, b_M)^T \in \mathbb{R}^M$ representa as medições dadas e a matriz $A_{M \times N}$ descreve a transformação direta da imagem original nas medições.

O algoritmo iterativo de expectativa máxima (EM) ou máxima verossimilhança [1, 9] baseia-se no pressuposto de que o ruído em b é do tipo Poisson. Se x é dado, a probabilidade de obtenção de b é:

$$P(b | A_x) = \prod_{i=1}^M \frac{e^{-(A_x)_i} ((A_x)_i)^{b_i}}{b_i!} \quad (2)$$

Portanto, dados b e A , o objetivo é encontrar x tal que a probabilidade apresentada na Eq. (2) seja maximizada. No entanto, em vez de maximizar a probabilidade, pode-se minimizar:

$$-\log(P(b | A_x)) = (A_x)_i - b_i \log((A_x)_i) + C \quad (3)$$

onde C é uma constante. Assim, a iteração do algoritmo EM resulta em:

$$x_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^M (a_{ij} \frac{b_i}{(Ax^n)_i})}{\sum_{i=1}^M a_{ij}} x_j^n \quad (4)$$

começando com um valor inicial x^0 para $n \geq 0$.

O método da variação total foi proposto por [7, 8] para remover o ruído e focar uma imagem, preservando suas arestas. Esta técnica é utilizada no processamento de imagem e corresponde a minimizar um funcional de energia da forma:

$$\min_x \int_{\Omega} |\nabla x| + \alpha \|Ax - b\|_2^2 \quad (5)$$

onde x pode ser visto como uma imagem em duas ou três dimensões no domínio espacial Ω , A usualmente é um operador de enfoque, b a imagem ruidosa e desfocada, e $\|Ax - b\|_2^2$ um termo de fidelidade dos dados imposto ao ter assumido ruído gaussiano.

O algoritmo EM+TV combina a Máxima Expectação usando ruído Poisson com o método da Variação Total, donde A representa a transformada discreta de Radon e b um pequeno número das projeções da TC. O objetivo é reconstruir a imagem com a mínima variação total e a máxima probabilidade, dadas algumas projeções ruidosas no domínio do sinograma. Assim, deve-se buscar o ponto ótimo, resolvendo a escalarização das duas funções objetivo, resultando na minimização de x na seguinte equação:

$$\int_{\Omega} |\nabla x| + \alpha \sum_{i=1}^M ((A_x)_i - b_i \log(A_x)_i) \quad (6)$$

sendo $x_j \geq 0$ com $j=1, \dots, N$; onde $\alpha > 0$ é um parâmetro de ajuste. Este é um problema de otimização convexo limitado e podemos encontrar a melhor solução, resolvendo as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [5, 6]:

$$-div \left(\frac{\nabla x}{|\nabla x|} \right)_j + \alpha \sum_{i=1}^M \left(a_{ij} \left(1 - \frac{b_i}{(A_x)_i} \right) \right) - y_j = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

com $x_j > 0$, $y_j > 0$ e $y_j x_j = 0$. Pelas condições anteriores temos que $x_j y_j = 0$ para todo j . Então se

multiplicamos a Eq. (7) por x_j , no pixel j obtemos:

$$-\frac{x_j}{\sum_{i=1}^M a_{ij}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla x}{|\nabla x|} \right)_j + \alpha x_j - \alpha \frac{\sum_{i=1}^M \left(a_{ij} \left(1 - \frac{b_i}{(A_x)_i} \right) \right)}{\sum_{i=1}^M a_{ij}} = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

Após conectar a etapa de EM, Eq. (2), obtém-se

$$x_j^{EM} = \frac{\sum_{i=1}^M \left(a_{ij} \left(\frac{b_i}{a_i x} \right) \right)}{\sum_{i=1}^M a_{ij}} x_j \quad (9)$$

Na última condição KKT obtém-se:

$$-\frac{x_j}{\sum_{i=1}^M a_{ij}} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla x}{|\nabla x|} \right)_j + \alpha x_j - \alpha x_j^{EM} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (10)$$

A Eq. (10) é a condição ótima para o seguinte problema de minimização da variação total: minimizar x na equação:

$$\int_{\Omega} |\nabla x| + \alpha \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ij} (x_j - x_j^{EM} \log x_j) \quad (11)$$

Para resolver o problema de minimização do algoritmo, usa-se um esquema de diferenças finitas semi-implícitas. Na etapa de EM, se calcula x^{EM} e, discretizando a Eq. (11), calcula-se o novo valor de x . Considerando um valor inicial x^0 , é apresentada a seguir a equação discreta para calcular x^{n+1} , $n > 0$. Duas dimensões espaciais foram assumidas, assim x representa uma matriz 2D.

$$\frac{1}{\infty} \frac{x_{i,j}^n}{v_{i,j}} \left[\begin{array}{c} - \frac{x_{i+1,j}^n - x_{i,j}^{n+1}}{\sqrt{\delta + (x_{i+1,j}^n - x_{i,j}^n)^2 + (x_{i,j+1}^n - x_{i,j}^n)^2}} + \frac{x_{i,j}^{n+1} - x_{i-1,j}^n}{\sqrt{\delta + (x_{i,j}^n - x_{i-1,j}^n)^2 + (x_{i-1,j+1}^n - x_{i-1,j}^n)^2}} - \\ \frac{x_{i,j+1}^n - x_{i,j}^{n+1}}{\sqrt{\delta + (x_{i+1,j}^n - x_{i,j}^n)^2 + (x_{i,j+1}^n - x_{i,j}^n)^2}} + \frac{x_{i,j}^{n+1} - x_{i,j-1}^n}{\sqrt{\delta + (x_{i+1,j-1}^n - x_{i,j-1}^n)^2 + (x_{i,j}^n - x_{i,j-1}^n)^2}} \end{array} \right] + x_{i,j}^{n+1} - x_{i,j}^{EM} = 0 \quad (12)$$

onde $v_{i,j} = \sum_{i=1}^M a_{ij}$.

Finalmente, as duas etapas do algoritmo EM e TV são resolvidas de forma alternada, para cada iteração principal, duas ou três iterações de EM e de cinco a dez iterações de TV.

2.1 Implementação computacional do algoritmo

O algoritmo EM+TV ainda não foi testado reconstruindo imagens tomográficas obtidas de medições feitas com um tomógrafo. Por ser um algoritmo novo, ele só tem oferecido resultados reconstruindo imagens tomográficas a partir de *phantoms* (modelo matemático ou experimental) usados para testes dos algoritmos de reconstrução tomográfica. A rotina computacional desenvolvida recebe como dados de entrada: 1) *phantom* volumétrico a ser

reconstruído e 2) dimensões do volume; e fornece como saída: o volume reconstruído. Do volume de entrada são apagados dados na forma a considerar que o objeto foi explorado só com um conjunto mínimo de radiografias. Partindo destes dados de entrada incompletos, sobre eles é executado o algoritmo EM+TV. A Figura 1 mostra o diagrama de fluxo da rotina computacional e o algoritmo EM+TV.

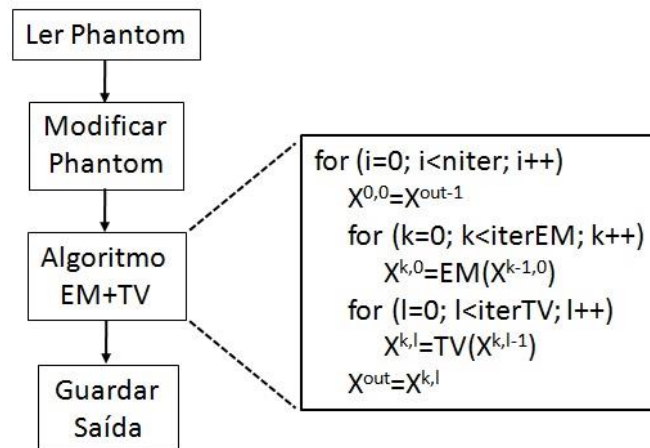


Figura 1: Diagrama de fluxo da rotina de software e resumo do algoritmo EM+TV

Na implementação computacional foram usadas como ponto de partida as rotinas disponibilizadas na página de internet “*Center for Domain Specific Computing - image processing pipeline*” [11]. No algoritmo, foram consideradas 100 iterações principais, executando, em cada uma delas, 3 passos EM e 10 passos TV.

3 RESULTADOS

Para testar o algoritmo EM+TV, foram usados dois *phantoms*, o *phantom* Shepp-Logan, gerado usando o Matlab, e um *phantom* de figuras geométricas, gerado usando o Mathcad 15. Ambos os *phantoms* foram gerados para os testes em volumes tridimensionais de 128, 256 e 512 pixels.

As Figuras 2 e 3 mostram, para cada *phantom*, uma fatia original e sua reconstrução pelo algoritmo EM+TV. Nestas figuras, são mostradas fatias dos volumes de 128 pixels e resultados similares foram conseguidos com os volumes de 256 e 512 pixels.

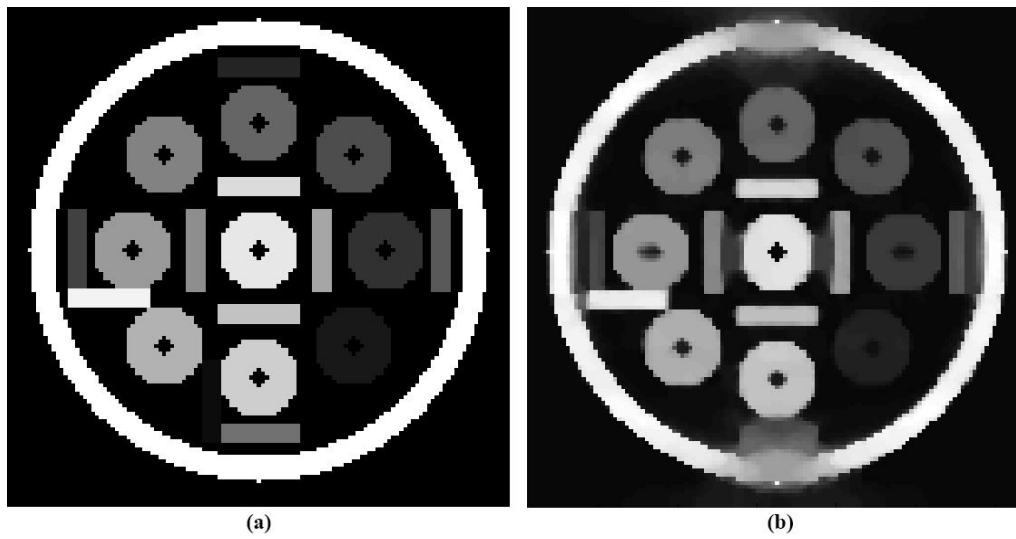


Figura 2: Fatias do *phantom* geométrico, (a) original e (b) reconstruída

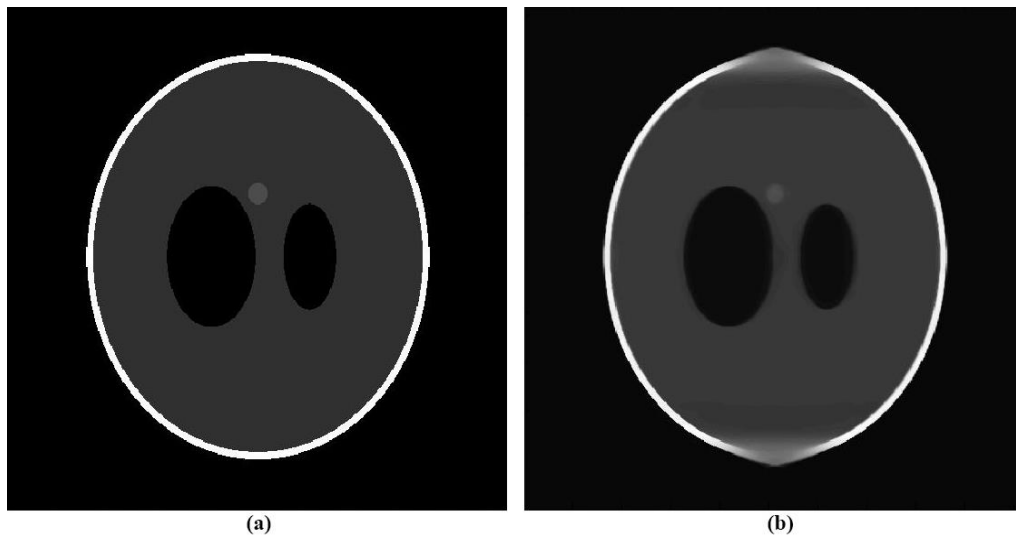


Figura 3: Fatias do *phantom* SheepLogan, (a) original e (b) reconstruída

As fatias reconstruídas reproduzem com boa qualidade as estruturas das fatias originais, pelo que, pode-se afirmar que o algoritmo EM+TV consegue imagens reconstruídas de boa qualidade, como reportado pelos autores [10] e [3]. As Figuras 4 e 5 mostram, enquanto o algoritmo é executado, como vão aparecendo os detalhes nos planos da reconstrução. Um plano do volume é mostrado, especificando a iteração terminada ao coletar a imagem.

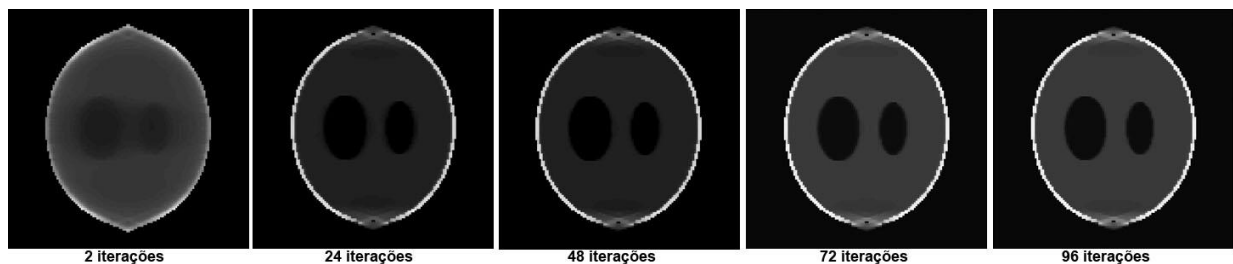


Figura 4: Mudanças num plano da reconstrução do *phantom* SheepLogan segundo se sucedem as iterações do algoritmo EM+TV

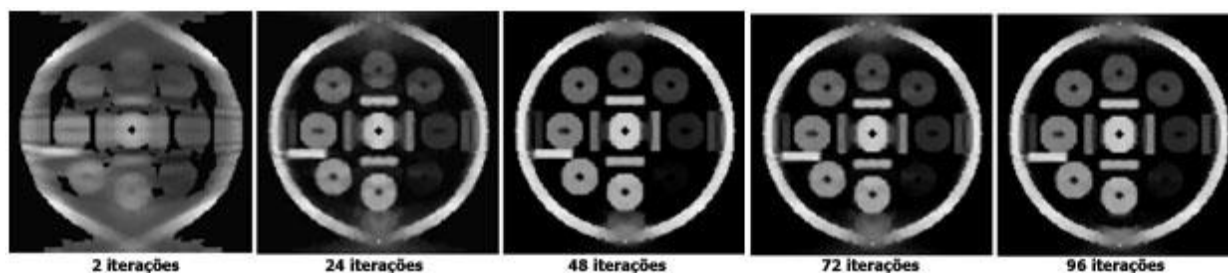


Figura 5: Mudanças num plano da reconstrução do *phantom* geométrico segundo se sucedem as iterações do algoritmo EM+TV

Nas Figuras 4 e 5 podemos ver que, nas primeiras iterações, ainda não se definem os detalhes nas estruturas das imagens e com o decorrer delas estes detalhes vão aparecendo.

Evseev *et al.* [3] comentam que os tempos de execução do algoritmo impediram testar com amostras de tamanho maior que 128 pixels em um processador Intel Core i7, no sistema operacional Windows7. Para os testes do algoritmo, foi usado o sistema operativo Ubuntu 13.10, um processador Intel Core i5 a 1.60 GHz e com 6 GiB de memória RAM. A implementação computacional inicial do algoritmo, com os códigos baixados do “*Center for Domain Specific Computing image processing pipeline*”, consegue reconstruir volumes de 128 pixels em 1,7662 horas. Realocando fora dos laços de repetição algumas seções do código, para otimizar a implementação computacional, e compilando com diretivas de compilação, para otimização nível 3, conseguimos diminuir os tempos de execução. A Tabela 1 resume os tempos de execução obtidos.

Tabela 1: Tempos de execução do algoritmo EM+TV

Tamanho do volume (pixels)	Tempo de reconstrução (h)
128x128x128	0,3820
256x256x256	1,9542
512x512x512	8,3589

Observando a Tabela 1, nota-se que para o volume menor, 128 pixels, o tempo pode ser considerado razoável. No entanto, para volumes maiores, o tempo cresce, dificultando a execução dos testes e o uso do algoritmo.

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho foi testado o algoritmo EM+TV para reconstrução 3D de imagens tomográficas com volumes de diferentes tamanhos e confirmada a aplicabilidade do método para reconstruir as imagens a partir de poucos dados iniciais. Os tempos de execução do algoritmo foram diminuídos ao otimizar o código e sua compilação, não entanto com o aumento do tamanho do volume os tempos de execução crescem dificultando o uso do algoritmo.

Para continuar este trabalho pretende-se paralelizar o algoritmo para diminuir seu tempo de execução, o que facilitaria seu uso e validação para testes com dados reais.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte dado pela Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Dempster, N. Laird e D. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 39:1-38, 1977.
- [2] J. S. Dominguez. *Paralelização do algoritmo FDK para reconstrução 3D de imagens tomográficas usando unidades gráficas de processamento e CUDA-C*. Dissertação de Mestrado, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, 2012.
- [3] I. Evseev, F. Ahmann, H. P. da Silva, H. R. Schelin e O. Yevseyeva. Test of 3D CT reconstructions by EM + TV algorithm from undersampled data. *AIP Conference Proceedings*, 79-81, 2013.
- [4] J. HSIEH. *Computed Tomograph: Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances*. Washington, EUA: SPIE, 2003.
- [5] W. Karush. *Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints*. Dissertação de Mestrado. Department of Mathematics, University of Chicago, Chicago, Illinois, 1939.
- [6] H. Kuhn e A. Tucke. Nonlinear programming, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 481-492, 1951.
- [7] L. Rudin, S. Osher e E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*. 60:259-268, 1992.
- [8] L. Rudin e S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 1:31-35, 1994.
- [9] L. Shepp e Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1:113-122, 1982.
- [10] M. Yan e L. A. Vese. Expectation maximization and total variation-based model for computed tomography reconstruction from undersampled data. *Proc. SPIE 7961, Medical Imaging 2011: Physics of Medical Imaging*.
- [11] M. Yan. *emtv-reconstruction-sequential-c++*. Center for Domain Specific Computing, 2012. Disponível em <https://code.google.com/archive/p/cdsc-image-processing-pipeline/downloads>. Acesso em 16 julho 2014.