

## ANÁLISE DE VIBRAÇÃO ESTOCÁSTICA EM SUSPENÇÃO VEICULAR UTILIZANDO MODELO *QUARTER-CAR*

Lívia M. Nogueira<sup>1,2\*</sup>, Marcus V. C. dos Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Nova Iguaçu, 26041-271, RJ, Brasil*

<sup>2</sup>*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Cidade Universitária, 21941-914, RJ, Brasil*

**Palavras-chave:** Vibrações, Análise Estocástica, Monte Carlo, Incertezas, Suspensão veicular.

**Resumo.** A suspensão veicular é um sistema que está diretamente ligado ao conforto e à segurança dos passageiros. As irregularidades presentes no perfil da pista provocam excitações verticais que poderão ser transmitidas para o chassi de forma a causar perda de estabilidade e danos à saúde do condutor. O sistema de suspensão se destina a atenuar os efeitos dessas perturbações. Através de componentes elásticos e de amortecimento, este conjunto pode ser considerado um filtro mecânico ao admitir ou rejeitar faixas de frequência do espectro da excitação do solo. As propriedades relativas a estes componentes, no entanto, podem apresentar grande variabilidade devido à configuração geométrica, processo de fabricação ou mesmo por uma rastreabilidade não garantida. Além disso, a inerente imprevisibilidade no perfil da pista alimenta as incertezas e motiva o estudo da vibração como um processo estocástico. O presente trabalho se propõe assim a adotar o Método de Monte Carlo no estudo de vibrações em suspensão veicular utilizando o modelo *quarter-car*, e em particular, identificar os parâmetros de maior influência para a sua resposta dinâmica. Os resultados estocásticos são considerados em envelope probabilístico de 95 % e comparados às respostas determinísticas.

---

\*Endereço de e-mail: [livia.nogueira@cefet-rj.br](mailto:livia.nogueira@cefet-rj.br).

## **STOCHASTIC VIBRATION ANALYSIS OF AN AUTOMOBILE SUSPENSION SYSTEM USING THE QUARTER-CAR MODEL**

**Keywords:** Vibrations, Stochastic Analysis, Monte Carlo, Uncertainties, Vehicle suspension.

**Abstract.** A vehicle suspension is a system that is directly linked to passenger comfort and safety. Irregularities in the profile of the track cause vertical excitations that can be transmitted to the chassis in such a way that causes loss of stability and damage to the driver's health. The suspension system is intended to mitigate the effects of these disturbances. This set can be considered a mechanical filter through elastic and damping components when admitting or rejecting frequency ranges of the ground excitation spectrum. The properties related to these components, however, can present great variability due to the geometric configuration, manufacturing process, or even non-guaranteed traceability. Furthermore, the inherent unpredictability in the track profile encourages and motivates the study of vibration as a stochastic process. The present work proposes to adopt the Monte Carlo Method in the study of vibrations in vehicular suspension using the quarter-car model, and particularly, to identify the parameters with the greatest influence on its dynamic response. Stochastic results are considered in a 95 % probabilistic envelope and compared to deterministic responses.

## 1 INTRODUÇÃO

O sistema de suspensão desempenha papel fundamental no isolamento das vibrações provocadas pelo tráfego em terrenos irregulares. Composto essencialmente por molas e amortecedores, o conjunto deve propiciar a estabilidade da carroceria enquanto confere segurança e conforto para os ocupantes [6].

A associação dos elementos mola e amortecedor funciona de forma que a energia associada aos impactos seja absorvida pelo componente elástico, que se comprime e então retorna à posição inicial de forma gradual e suave, controlada pelo amortecedor. Dessa forma, as oscilações da suspensão são contidas e as rodas do veículo permanecem em contato com o solo, enquanto as imperfeições da pista são absorvidas.

Modelos dinâmicos que promovam o estudo de vibrações em suspensão veiculares já foram propostos na literatura [1, 4, 8, 9]. O diferencial a que se propõe o presente trabalho está na adoção de modelo probabilístico que considere as incertezas associadas aos parâmetros de projeto.

A importância da construção de modelos que incorporem explicitamente a incerteza está no fato de que a maioria dos problemas tratados no mundo real não pode ser modelado de forma integralmente determinística.

Em [6] a incerteza é classificada como: aleatória e epistêmica. A incerteza aleatória é designada por variabilidade inerente ou estocástica. Trata de descrever variações intrínsecas ao sistema causadas pela natureza aleatória dos dados associados. A incerteza epistêmica é dita subjetiva e está relacionada a imprecisão ou certo nível de ignorância quanto a informações do sistema ou parâmetros envolvidos. É usada para descrever qualquer falta de conhecimento durante o processo de modelagem.

O estudo se propõe a incorporar incertezas na análise do comportamento dinâmico veicular através da modelagem estocástica e compará-las às respostas determinísticas, buscando, com isso, maior confiabilidade na determinação de comportamento reais.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é realizada a modelagem determinística da suspensão avaliada no domínio do tempo e da frequência; na Seção 3 é considerado o modelo estocástico considerando incertezas inerentes aos parâmetros envolvidos; na Seção 4 são apresentados os resultados e a influência da variabilidade de cada um dos parâmetros na resposta dinâmica do modelo, por fim, na Seção 5 são apresentadas as conclusões finais.

## 2 MODELO DETERMINÍSTICO

O modelo considerado é dito *quarter car*, e é o mais frequentemente utilizado nas análises de suspensões. Sua larga aplicação é justificada pela simplicidade e eficiência computacional. As hipóteses assumidas neste modelo são [5]:

- a massa do automóvel é igualmente distribuída e suportada pelas 4 rodas;
- cada suspensão atua de forma independente;
- mola e amortecedor apresentam comportamento linear;
- pneus estão sempre em contato com a superfície da pista;
- efeito do atrito negligenciado para que o amortecimento estrutural residual não seja considerado.

Foi considerado um sistema de 1-GDL sob excitação harmônica da base dada por função  $y(t)$ , como mostrado na Figura 1.

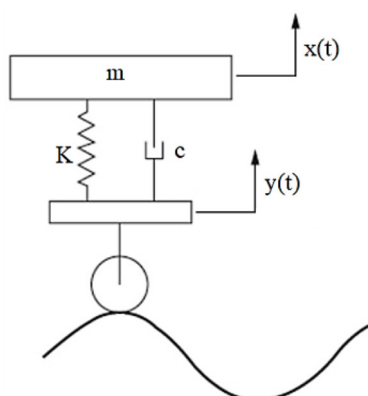


Figura 1: Modelo *quarter-car* para suspensão

A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky \quad (1)$$

em que:

$m$  = massa de  $\frac{1}{4}$  carro

$k$  = constante elástica

$c$  = constante de amortecimento

O objetivo está na análise da transmissão do movimento sofrido pela base para a massa e na determinação de seu deslocamento vertical relativo, dado pela Eq. (2). Para isso, as respostas do sistema serão avaliadas no domínio do tempo e da frequência.

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (2)$$

## 2.1 No domínio do tempo

Seja considerado um perfil de pista totalmente controlado e senoidal de amplitude  $Y$  e velocidade angular  $\omega$ :

$$y(t) = Y \sin(\omega t) \quad (3)$$

A solução em regime permanente para o deslocamento relativo  $z(t)$  pode então ser obtido por:

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \phi) \quad (4)$$

em que:

$$Z = \frac{Yr^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (5)$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right) \quad (6)$$

onde  $\xi$  é o fator de amortecimento e  $r$  é a razão entre a frequência  $\omega$  avaliada e a frequência natural do sistema  $\omega_n$ .

## 2.2 No domínio da frequência

Uma Função de Resposta em Frequência (FRF) é uma relação causa/efeito que descreve o comportamento do sistema com uma entrada e uma saída. A função de transferência  $H(\omega)$  dada

pela Eq. (7) captura a transmissibilidade de deslocamento do sistema e é conveniente a predição do pico de deslocamento  $z(t)$  quando  $y(t)$  é uma função harmônica.

$$H(\omega) = \frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (7)$$

Um modelo é dito determinístico quando suas características são perfeitamente previsíveis. Neste caso, considera-se que há total convicção em todos os parâmetros de entrada do modelo. Os valores determinísticos considerados para os parâmetros são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores determinísticos considerados para os parâmetros

Parâmetros	Valores
m	270 (kg)
k	11200 (N/m)
c	2426 (Ns/m)
Y	0,05 (m)
$\omega$	10 (rad/s)

### 3 MODELO ESTOCÁSTICO

Se o sistema não é perfeitamente conhecido do ponto de vista dinâmico, diz-se que é aleatório, imprevisível ou não determinístico. Em um sentido fundamental, a incerteza associada à saída do modelo pode ser representada como uma distribuição de probabilidade ou como uma quantidade estatística específica. Ao introduzir noções de confiança e probabilidade, essa abordagem fornece mais informações do que uma única estimativa pontual e possibilita informar ao projetista sobre o grau de risco associado a determinadas ações.

A simulação de um modelo probabilístico, segundo Paula [7], consiste na geração de mecanismos estocásticos e, em seguida, na observação do fluxo resultante do modelo ao longo do tempo.

O método de Monte Carlo é um método computacional que utiliza números aleatórios e estatísticas para resolver problemas. Uma definição formal de Método de Monte Carlo foi dada por Halton [2] como uma técnica para representar a solução de um problema como um parâmetro de uma população hipotética e, que usa uma sequência aleatória de números para construir uma amostra da população da qual estimativas estatísticas desse parâmetro possam ser obtidas. Basicamente isto se traduz em avaliar o mesmo modelo centenas ou milhares de vezes, gerando a cada vez um número aleatório para cada parâmetro descrito como uma distribuição. Após diversas execuções, estes resultados podem ser organizados em histogramas de frequência, ou através de envelopes probabilísticos que expressam a probabilidade da ocorrência de tal evento.

Serão consideradas incertezas de natureza epistêmica para os parâmetros materiais dos elementos da suspensão e estocásticas na modelagem do perfil da pista, mostradas a seguir.

#### 3.1 Parâmetros materiais

A variabilidade dos parâmetros materiais tem origens diversas e podem estar relacionadas ao desconhecimento dos valores corretos de suas propriedades, seja devido a dificuldades nas medições dos parâmetros necessários, ou à falta de calibração dos instrumentos de medição.

Utilizando o Princípio da Máxima Entropia, estes parâmetros foram modelados segundo distribuição contínua uniforme sobre suporte fixo que considera desvios em torno do valor esperado médio (determinístico), como mostrado na Figura 2. As distribuições consideradas

para os parâmetros são apresentadas na Tabela 2.

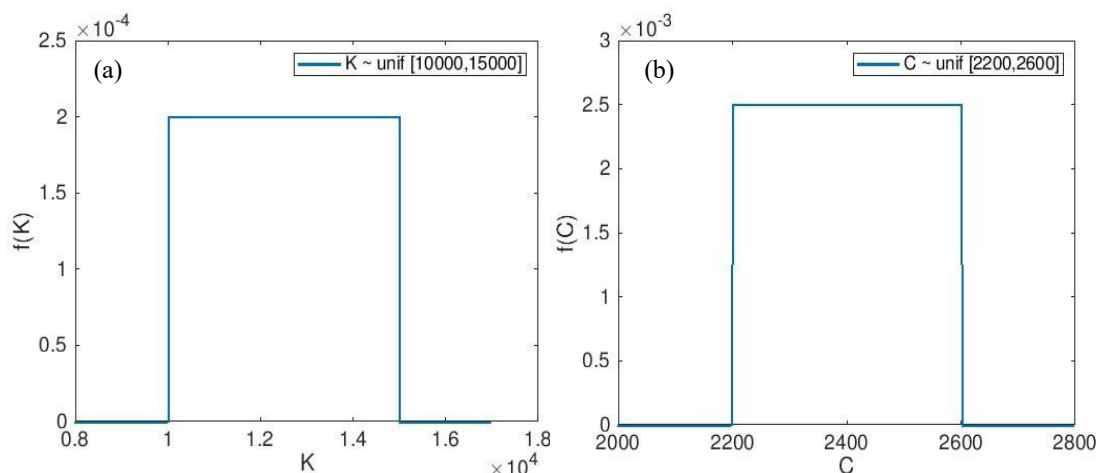


Figura 2: Modelo probabilístico considerado para: (a) constante elástica; (b) constante de amortecimento

Tabela 2: Distribuições estocásticas consideradas para os parâmetros analisados

Parâmetros	Distribuições
k	Unif. ~ [10000, 15000]
c	Unif. ~ [2200, 2600]

### 3.2 Perfil da pista

As irregularidades da pista medidas em testes podem ser especificadas utilizando o valor eficaz (RMS - *Root Mean Square*) de sua amplitude para o domínio do tempo ou através da densidade espectral no domínio da frequência. O RMS do deslocamento vertical do perfil corresponde a área abaixo da densidade espectral de potência (PSD - *Power Spectral Density*). A meta de análise espectral é descrever a distribuição sobre frequência da potência contida em um sinal com base em um conjunto finito de amostras.

Os perfis são considerados processos randômicos das alturas do solo por uma determinada velocidade e convertido para um processo no domínio do tempo. O método descrito pela norma ISO 8608:2016 [3] permite fazer uma estimativa do grau de rugosidade de um pavimento, através da relação entre densidade espectral de potência e frequência espacial, isto é:

$$G_d(n) = G_d(n_o) * \left(\frac{n}{n_o}\right)^{-w} \quad (8)$$

onde,  $G_d(n)$  é a PSD de deslocamento em termos de frequência espacial em  $m^3$ ,  $G_d(n_o)$  é a PSD de referência também em  $m^3$ ,  $n$  é a frequência espacial em ciclos por metro,  $n_o$  é a frequência espacial de referência em ciclos por metro, e  $w$  é o expoente responsável pela inclinação da PSD ajustada.

De acordo com [3], o valor do expoente  $w$  para obtenção de uma PSD de velocidade constante é igual a 2, a frequência espacial de referência  $n_o$  é 0,1 ciclos por metro e a faixa de frequências espaciais que descreve o comportamento dinâmico de um veículo varia entre 0,011 e 2,83 ciclos por metro.

A relação entre as PSDs de deslocamento em termos de frequência espacial e temporal se dá de acordo com a Eq. (9).

$$G_d(f) = G_d(n) * v \quad (9)$$

onde,  $G_d(f)$  é a PSD de deslocamentos em termos da frequência temporal em  $m^2.s$  e  $v$  é a velocidade do veículo em m/s.

Para o uso de perfis de pista em simulações de comportamento dinâmico veicular, a norma ISO 8608:2016 [3] classifica progressivamente as pistas em A para terrenos suaves à H para terrenos rústicos, como mostra Tabela 3.

Tabela 3: Classificação das pistas de acordo com o grau de rugosidade [3]

Classe da pista	Grau de rugosidade $G_d(n_o) \cdot 10^{-6} [m^3]$		
	Limite inferior	Média geométrica	Limite superior
A	-	16	32
B	32	64	128
C	128	256	512
D	512	1024	2048
E	2048	4096	8192
F	8192	16384	32768
G	32768	65536	131072
H	131072	262144	-

A amplitude do perfil da pista no domínio do tempo é calculada a partir da Eq. (10), em que se realiza o somatório para  $N$  intervalos de banda de frequência, sendo  $G_d(f_k)$  a PSD de deslocamento em termos da frequência temporal  $f_k$ , em Hz, definida pela Eq. (11). Além disso,  $\Delta f_k$  representa o intervalo de variação da frequência em Hz e  $\psi_k$  é o ângulo de fase constituído por um número aleatório entre 0 e  $2\pi$ .

$$y(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2G_d(f_k)\Delta f_k} \cos(2\pi f_k t + \psi_k) \quad (10)$$

$$G_d(f_k) = \frac{1}{v} G_d(n) \quad (11)$$

Para essa análise foi considerado um perfil de pista classe C, que representa condições regulares de rugosidade. A Figura 3 apresenta um exemplo de perfil de elevação para pista dessa classe.

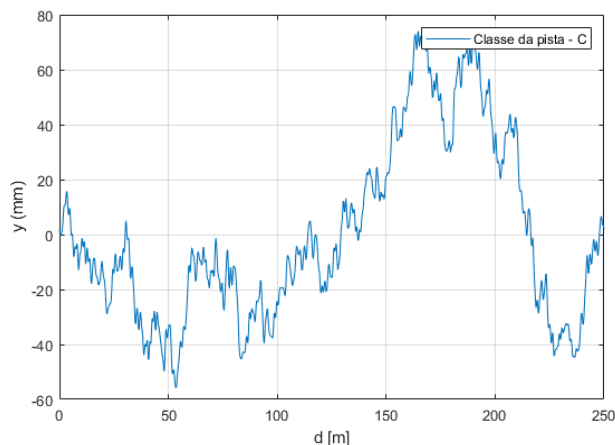


Figura 3: Exemplo de perfil de elevação para pista classe C

## 4 RESULTADOS

Os resultados foram analisados considerando a resposta dinâmica determinística e a média estocástica gerada a partir de simulações de Monte Carlo. Para os resultados estocásticos, foi considerado envelope probabilístico de 95 %.

A análise se inicia pela identificação da contribuição individual de cada parâmetro tomado como incerto e, posteriormente, considera-se a combinação destes efeitos.

### 4.1 Parâmetros materiais

A análise da evolução temporal quando considerada a incerteza na constante de amortecimento mostrou a baixa influência deste parâmetro na amplitude dos deslocamentos verticais relativos. Na Figura 4(a) é possível observar que a resposta determinística e a média estocástica, neste caso, sobrepõem-se e o envelope probabilístico de confiança 95 % se mostra bastante ajustado. Quando analisada a resposta em frequência, na Figura 4(b), foi possível identificar maior dispersão da transmissibilidade de deslocamentos, sobretudo em frequências maiores que 10 Hz.

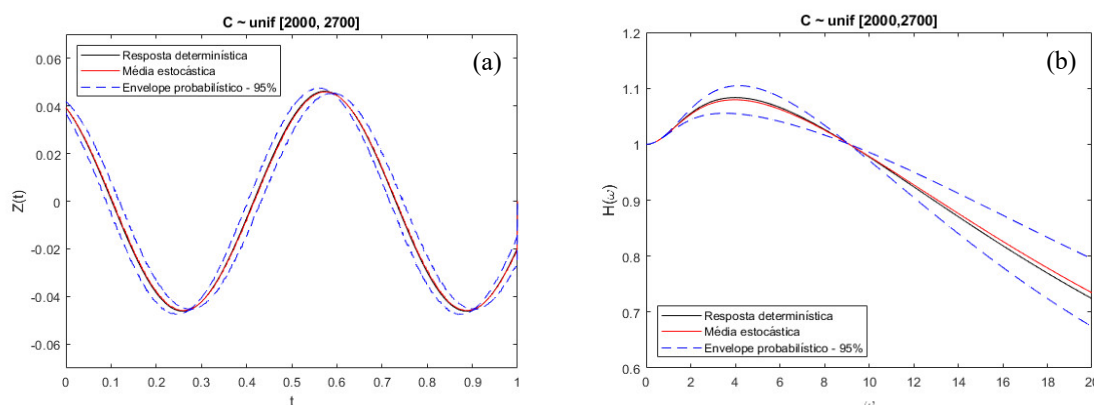


Figura 4: Respostas estocásticas dado  $c$  como incerto: (a) no domínio do tempo (b) no domínio da frequência

Quando a constante elástica é modelada como uma função de densidade de probabilidade uniforme, houve maior relevância nas amplitudes da resposta  $Z(t)$ , como mostrado na Figura 5(a). Nota-se, no entanto, que há certo intervalo definido em que a média estocástica e a resposta determinística são coincidentes e não há dispersão dos resultados, tornando o envelope de confiabilidade totalmente restrito a estes valores. Foi possível identificar variação na definição da frequência natural do sistema, momento em que as amplitudes de deslocamento se tornam máximas. Esse era um resultado esperado, já que a ressonância é dependente do fator  $k$ . O suporte escolhido para esta distribuição foi mais abrangente o que impactou em dispersão de sua resposta em frequência, especialmente após 7 Hz, como pode ser visto na Figura 5(b).



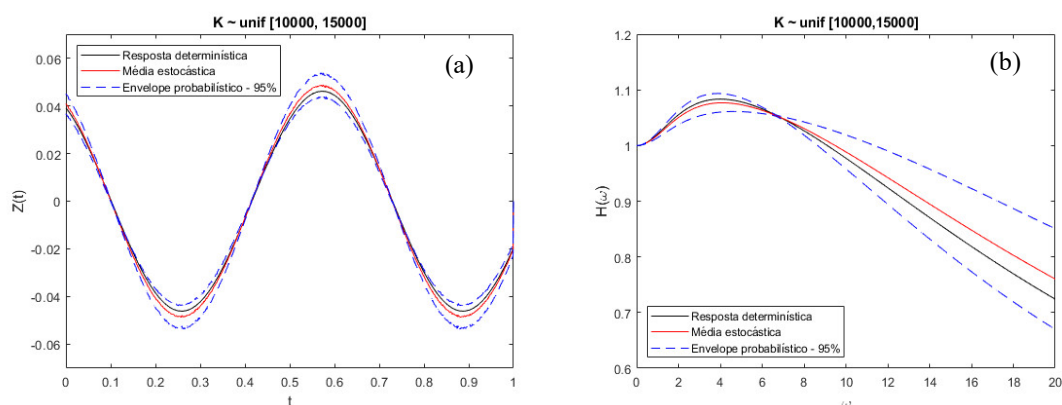


Figura 5: Respostas estocásticas dado  $k$  como incerto: (a) no domínio do tempo (b) no domínio da frequência

Por fim, buscou-se caracterizar as respostas estocásticas quando ambos os parâmetros materiais são atribuídos como incertos, constatando-se a sobreposição destes efeitos. Os resultados são apresentados na Figura 6.

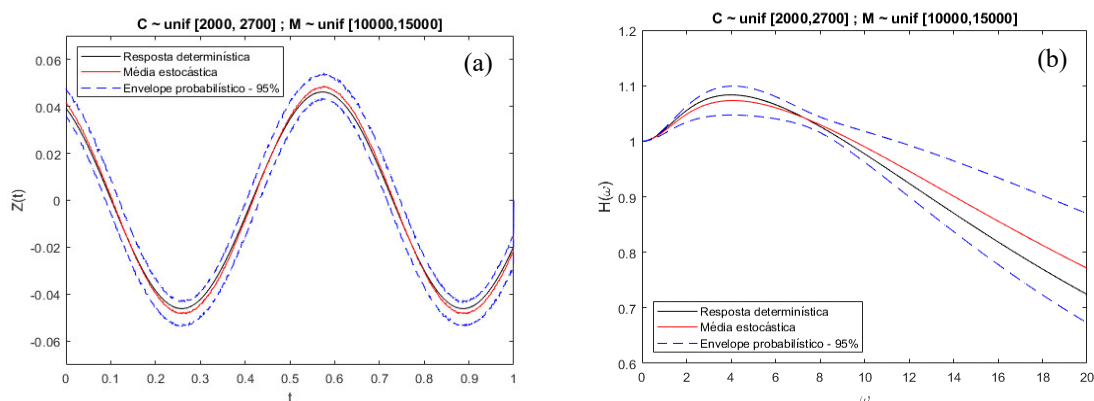


Figura 6: Respostas estocásticas dado  $c$  e  $k$  como incertos: (a) no domínio do tempo (b) no domínio da frequência

#### 4.1 Perfil da pista

A concepção do perfil da pista como um processo gaussiano revelou um padrão de resposta em deslocamento vertical relativo que apresenta média nula e amplitude máxima 0.052 m, como mostrado na Figura 7.

A análise envolvendo os parâmetros materiais não apresentou influência significativa quando comparado a resposta dinâmica que inclui perfis de pista com rugosidades de classe C. Com isso, pode-se notar que a maior sensibilidade desta análise está no modelo utilizado para simular a pista a ser trafegada.

A convergência em média quadrática foi determinada após 600 simulações, como mostrado na Figura 8.

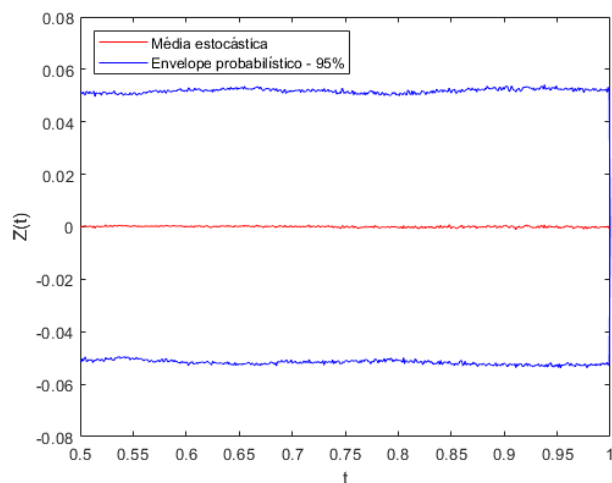


Figura 7: Resposta estocástica dado  $y(t)$  como incerto

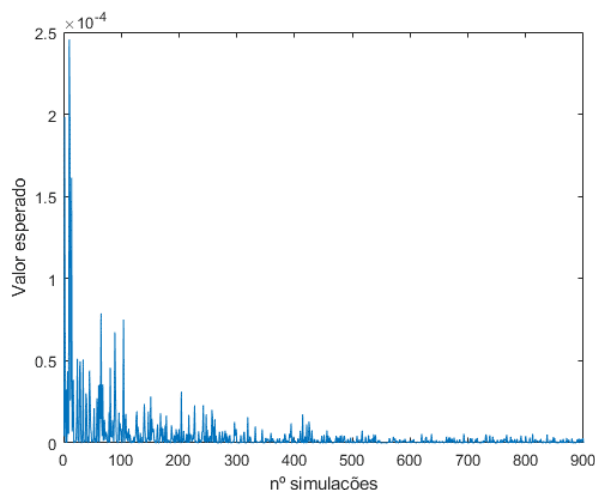


Figura 8: Convergência em simulações de Monte Carlo

## 5 CONCLUSÕES

O trabalho adotou o Método de Monte Carlo no estudo de vibrações em suspensão veicular utilizando o modelo *quarter-car*. Foram consideradas incertezas de natureza epistêmica para os parâmetros materiais dos elementos da suspensão e estocásticas na modelagem do perfil da pista. Para os parâmetros materiais foi considerado o Princípio da Máxima Entropia, modelados segundo distribuição contínua uniforme sobre suporte fixo que considera desvios em torno do valor esperado médio. Para o perfil da pista, foi considerado um perfil de pista classe C, segundo ISO 8608:2016, que representa condições regulares de rugosidade e modelado segundo processo gaussiano.

Foi observado que os parâmetros materiais impactaram de forma menos significativa quando comparadas às amplitudes dos deslocamentos verticais relativos que incluem as incertezas nos perfis da pista. Utilizando a distribuição contínua uniforme, as FRFs (Funções de Resposta em Frequência) revelaram maiores dispersões em altas frequências. Para a pista, a abordagem espectral revelou ser esse o fator de maior sensibilidade no modelo. Foi possível gerar

resultados probabilísticos que inferem quanto à amplitude máxima atingida pela massa relativa à carroceria. O trabalho concluído, assim, pode identificar a relação entre a resposta dinâmica determinada em modelagem determinística e a resposta estocástica quando parâmetros de projetos são considerados incertos, o que pode ser limitante para um projeto seguro.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. S. Barbosa. Vehicle response due to pavement roughness. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering*, 33(3):302–307, 2011. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782011000300005>.
- [2] J. H. Halton, A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo Method. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12:1–63, 1970. <https://doi.org/10.1137/1012001>.
- [3] International Organization for Standardization. ISO 8608:2016 – *Mechanical vibration – road surface profiles*. ISO/TC108/SC2, Measurement and evaluation of mechanical vibration and shock as applied to machines, vehicles and structures, 2016.
- [4] S. B. A. Kashem, K. B. Mustapha, T. S. Kannan, S. Roy, A. A. Safe, M. A. Chowdhury, T. A. Choudhury, M. Ektesabi and R. Nagarajah. A study and review on vehicle suspension system and introduction of a highbandwidth configured quarter car suspension system. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences Conference*, 9(30):59–66, 2015.
- [5] A. Kulkarni, S. A. Ranjha and A. Kappor. A quarter-car suspension model for dynamics evaluations of an in-wheel electric vehicle. *Journal of Automobile Engineering*, 232(9):1139–1148, 2017. <https://doi.org/10.1177/0954407017727165>.
- [6] W. L. Oberkampf, J. C. Elton, C. A. Joslyn, S. F. Wojtkiewicz and S. Ferson. Challenge problems: Uncertainty in system response given uncertain parameters. *Reliability Engineering & System Safety*, 85:11–19, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.res.2004.03.002>.
- [7] R. R. Paula. *Método de Monte Carlo e aplicações*. Trabalho de conclusão de curso de graduação, Departamento de Matemática da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda – RJ, 2014.
- [8] R. S. Sharp and D. A. Crolla. Road Vehicle Suspension System Design - a review. *Vehicle System Dynamics*, 16:167–192, 1987. <https://doi.org/10.1080/00423118708968877>.
- [9] B. Zhang, J. Zhang, J. Yi, N. Zhang and Q. Jin. Bangji. Modal and dynamic analysis of a vehicle with kinetic dynamic suspension system. *Shock and Vibration*, 2016, 1–18, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/5239837>.