

FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS

Natan S. Neves

*COPPE/UFRJ - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia,
Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Ilha do Fundão, 21941-909,
RJ, Brazil*

Palavras-chave: Elementos Finitos, Estruturas, Não linear, Programa Computacional.

Resumo. O presente artigo concentra-se na apresentação dos conceitos matemáticos-numéricos e procedimentos gerais do desenvolvimento de um código computacional para solução do comportamento não linear geométrico de estruturas reticuladas planas de três graus de liberdade por nó, caracterizados por duas translações e uma rotação. Para tanto, utiliza-se as aproximações de elementos finitos para solução discreta dos modelos estruturais, sendo implementados as rotinas computacionais em ambiente Matlab. A experimentação numérica e validação do código computacional são direcionados por casos testes conhecidos na literatura, transitando de análises em pilares, quadros e arcos. Em síntese, os resultados apresentam boa concordância com as soluções de referência para todos os casos estudados, indicando adequado comportamento das estruturas estudadas.

E-mail address: natan.neves@coppe.ufrj.br.

FINITE ELEMENT FORMULATION APPLIED TO THE NONLINEAR BEHAVIOR OF PLANE STRUCTURES

Keywords: Finite Elements, Structures, Nonlinear, Computer Program.

Abstract. This article concentrates on the presentation of mathematical-numerical concepts and general procedures for the development of a computational code for solving the geometric nonlinear behavior of plane structures of three degrees of freedom per node, characterized by two translations and one rotation. For this purpose, finite element approximations are used for discrete solution of structural models, with computational routines being implemented in a Matlab environment. Numerical experimentation and computational code validation are guided by test cases known in the literature, moving from analysis in columns, frames and arcs. In summary, the results show good agreement with the reference solutions for all the cases studied, indicating an adequate behavior of the studied structures.

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural visa estudar o comportamento de estruturas sujeitas as ações externas diversas, a fim de obter parâmetros e dados importantes para dimensionamentos e projetos, como deslocamentos, tensões e deformações. Frequentemente, a análise linear é usada em inúmeros problemas práticos da engenharia, tendo sua modelagem baseada na configuração original indeformada do elemento estrutural. Todavia, a análise elástica linear não representa o comportamento real das estruturas em certas condições de carregamentos não convencionais ou até mesmo para obter os carregamentos limites.

Neste contexto, a construção de estruturas mais esbeltas e com alto desempenho foi encaminhada pelo avanço recorrente de técnicas construtivas e pesquisas científicas, além do emprego de novos materiais de construção. Tais aspectos direcionam para uma análise estrutural não linear que permite uma maior verossimilhança entre o modelo de engenharia e o comportamento real. Quando estuda-se problemas dessa natureza, usualmente, adota-se duas fontes de não linearidade que ocorrem em estruturas e são significativas na prática da engenharia, devido associar importantes fenômenos que ocorrem nas estruturas quando expostas a certos efeitos e solicitações externas [10]. Sendo assim, primeiramente, cita-se a não linearidade física que provém do fato que o material não apresenta uma proporcionalidade na relação tensão-deformação, ou seja, a lei de Hooke não é válida.

Em sequência, a segunda fonte é a não linearidade geométrica, onde as estruturas são caracterizadas por grandes deslocamentos e/ou rotações, as equações de equilíbrio são definidas no estado deformado da estrutura ou também ocorre uma alteração na relação deformação-deslocamento, ou seja, nas equações cinemáticas [2]. Ressalta-se que uma estrutura pode apresentar um comportamento não linear, mesmo que o material seja elástico-linear.

Sendo assim, no decorrer das últimas décadas a análise não linear de estruturas direcionou grande interesse na área científica, devido os desafios matemáticos e numéricos associados as aplicações práticas na engenharia. Nesse cenário, como pioneiros, Tuner *et al.* [37] e Argyris [1] apresentam uma estratégia de solução não linear baseada em um método puramente incremental. Em busca de minimizar possíveis erros provenientes das técnicas incrementais, Oden [22] e Mallett e Marcal [16] utilizaram iterações do tipo Newton-Raphson para solução. Nos trabalhos de Brebbia e Connor [7] e Murray e Wilson [20] combinaram os métodos incrementais e iterativos, considerando inicialmente no ciclo iterativo a carga sendo constante. Sendo assim, foi introduzida ao meio científico a estratégia de solução incremental-iterativa. Os métodos de solução baseiam, frequentemente, nas premissas do método de Newton-Raphson padrão (MNRP), onde se deve realizar a atualização continuamente da matriz de rigidez atualizada. Contudo, Zienkiewicz [42] e Crisfield [11] apresentaram o método de Newton-Raphson modificado (MNRM), onde a matriz de rigidez é atualizada somente em cada passo incremental.

Os problemas não lineares geométricos buscam estipular trajetórias de equilíbrio, ou seja, relações entre níveis de carga e deslocamento. Todavia, dependendo da natureza e configurações do sistema, a estrutura pode apresentar vários pontos críticos, gerando dificuldades no tratamento numérico e na previsão do comportamento do elemento estrutural. Sendo assim, estudos iniciais acerca de tais problemas foram realizados em Sharifi e Popov [33] e Sabir e Lock [32]. Posteriormente, inúmeros métodos alternativos foram desenvolvidos visando contornar os problemas expostos, por exemplo, o método de comprimento de arco [31, 39], método de controle de deslocamento [3], método de controle de energia [27], método do fluxo normal [38], método do controle de deslocamento generalizado [41], dentre outros. Meek e Tan [19], Rezaiee-Pajand *et al.* [29] e Bergan e Sørenseide [6] apresentaram investigações acerca de algumas

dessas estratégias de solução numérica não linear.

Em diversos problemas físicos não lineares estruturais é interessante usar estratégias eficientes baseadas em incrementos automáticos de carga, ou seja, estimar o tamanho do incremento e o sinal correto desse parâmetro, a fim de investigar os pontos limites. Bergan *et al.* [5] e Bergan [4] definiram o parâmetro de rigidez corrente (*Current Stiffness Parameter - CSP*), destinado ao controle do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga, influenciado diretamente pelo grau de não linearidade do sistema estrutural. Crisfield [12] apresenta técnicas para controle do tamanho de comprimento de arco e do tamanho do incremento inicial do parâmetro de carga, onde necessitam de informações como quantidade de iterações desejadas e quantidade de iterações realizadas no passo de carga anterior. Neste contexto, no trabalho de Yang e Kuo [40] apresenta estratégias de solução baseadas no GSP (*General Stiffness Parameter*), representando um parâmetro de rigidez generalizado do sistema.

Pacoste e Eriksson [25] realizou um tratamento acerca da formulação de elementos de viga para a análise numérica de fenômenos de instabilidade em estruturas, onde comparou as descrições lagrangianas total e co-rotacional, aplicadas a problemas bidimensionais e tridimensionais. Posteriormente, Pacoste [24] realizou investigações numéricas acerca da instabilidade de cascas utilizando elementos finitos triangulares de três nós e seis graus de liberdade em cada nó.

No Brasil, dentre as inúmeras pesquisas voltadas para análise não linear de estruturas, cita-se o trabalho de Galvão [14], onde buscou realizar um desenvolvimento de um programa computacional para a análise não linear estática e dinâmica de pórticos planos com ligações flexíveis. Além disso, Silva [34] desenvolveu uma ferramenta computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas reticuladas baseada no método dos elementos finitos. Onde considerou a não linearidade geométrica, tratando os efeitos da deslocabilidade da estrutura e a não linearidade física caracterizada pela inelasticidade do aço e as ligações semirrígidas entre os membros estruturais. Paraski [26] realizou um desenvolvimento de um código para análise estática de estruturas reticuladas planas com não linearidade geométrica, onde a implementação computacional foi realizada em Matlab, visando a simplicidade, compactação e a disponibilidade de recursos gráficos para pós-processamento.

No trabalho de Maximiano [18], desenvolveu uma alternativa eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal. Para tanto, a condição de perpendicularidade deve ser satisfeita ao longo do processo iterativo de solução, a fim de contornar as dificuldades em ultrapassar todos os pontos limites que surgem ao longo da trajetória de equilíbrio. Os problemas estudados baseiam-se na análise de arcos com comportamento geometricamente não linear. Silva [35] teve como objetivo desenvolver formulações para estruturas reticuladas bidimensionais com comportamento não linear geométrico baseado no método dos elementos finitos e no referencial corrotacional. A metodologia de solução tem como base o método de Newton-Raphson acoplado as estratégias de incremento de carga e de iteração. As implementações foram realizadas no programa computacional CS-ASA.

Oliveira [23] descreve a formulação corrotacional de um elemento de viga unificado com base nas teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, sendo usado para analisar problemas fortemente não-lineares e que não apresentam bloqueio por cisalhamento. Aplica-se o método de comprimento de arco, onde possibilita a investigação detalhada dos caminhos de equilíbrio com diversos pontos limites. Ribeiro [30] apresenta um estudo do comportamento não linear geométrico de sistemas estruturais aporticados planos. Para tanto, utiliza-se a estratégia incremental-iterativo de Newton-Raphson com controle de carga com atualização da matriz de rigidez a cada iteração e a abordagem corrotacional. Além disso, o programa computacional permite a consideração de elementos com seções transversais arbitrárias e variando ao longo

do elemento. As aplicações foram destinadas ao contexto de projeto de estruturas em concreto armado e aço, e na análise de estabilidade global da estrutura.

Desta forma, o vigente estudo concentra-se em apresentar um módulo computacional específico para análise estrutural, desenvolvido em ambiente Matlab, denominado pelo autor de NASEN/SA (*Numerical Analysis System for Engineering/Structural Analysis*), fundamentado nos procedimentos de elementos finitos para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas planas [21].

2 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS NÃO LINEARES ESTRUTURAIS

A formulação não linear de pórticos planos é construída com base no referencial Lagrangiano atualizado. Define-se as componentes planas de tensão provenientes do tensor de Cauchy como τ_{xx} e τ_{xy} , e as deformações incrementais de Green e_{xx} e e_{xy} . Com base no princípio dos deslocamentos virtuais, pode-se escrever a equação de equilíbrio incremental do trabalho virtual [40], conforme dado pela Eq. (1).

$$\int_V (Ee_{xx}\delta e_{xx} + 4Ge_{xy}\delta e_{xy}) dV + \int_V ({}^t\tau_{xx}\delta\eta_{xx} + 2{}^t\tau_{xy}\delta\eta_{xy}) dV = {}^{t+\Delta t}R - {}^tR \quad (1)$$

Como a relação deformação-deslocamento é fundamentada pelo tensor de Green-Lagrange, considerando as deformações axiais e cisalhantes [28], pode-se escrever as relações diferenciais a seguir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_y}{dx} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} \frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} \frac{du_y}{dx} \right) \quad (3)$$

Nas sentenças matemáticas apresentadas na Eq. (2) e na Eq. (3), os primeiros termos representam as parcelas lineares e os demais termos são correspondem as parcelas não lineares. Adota-se também a hipótese de Euler-Bernoulli, que define que as seções transversais planas permanecem normais ao eixo da barra na flexão. Desta maneira, os deslocamentos u_x e u_y em um ponto genérico pode ser associado aos deslocamentos u e v da viga. Logo, pode-se escrever que os deslocamentos são $u_x = u - yv'$ e $u_y = v$. Após algumas manipulações, a sentença integral, dada pela Eq. (1), pode ser reescrita conforme posto a seguir.

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + EI_z \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2\delta v}{dx^2} \right) \right] dx + \dots \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[{}^tF_x \delta \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) + {}^tF_x \frac{I_z}{A} \delta \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \dots \\ & + \int_0^L \left[{}^tM_z \delta \left(\left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \right) - {}^tF_y \delta \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) \right] dx = \{\delta u\}^T \{ {}^{t+\Delta t}R - {}^tR \} \end{aligned} \quad (4)$$

Para convencionar as discussões posteriores no presente texto, considera-se que a Eq. (4) é referida como teoria geral. Essa consideração é interessante, uma vez que é possível realizar-se uma formulação generalista que permita atender as teorias simplificadas, como desprezar termos de alta ordem nas relações cinemáticas. Aplicando nesse estágio, os procedimentos de elementos finitos, que buscam aproximar o campo de deslocamento axial e vertical por meio de uma combinação linear auxiliada por funções de interpolação, conforme posto na Eq. (5) e na Eq. (6).

$$u = N_1 \bar{u}_1 + N_2 \bar{u}_2 = \{\tilde{\mathbf{N}}_1\} \{\bar{u}\} \quad (5)$$

$$v = N_3 \bar{v}_1 + N_4 \bar{\theta}_1 + N_5 \bar{v}_2 + N_6 \bar{\theta}_2 = \{\tilde{\mathbf{N}}_3\} \{\bar{v}\} \quad (6)$$

Os termos $\tilde{\mathbf{N}}_1$ e $\tilde{\mathbf{N}}_3$ representam os vetores que contêm as funções de interpolação, sendo lineares para deslocamento axial e cúbicas para deslocamento transversal, respectivamente. Essas funções são amplamente conhecidas na literatura clássica de elementos finitos, conforme pode ser visto em detalhes em Reddy [28]. As aproximações apresentadas na Eq. (5) e na Eq. (6), são aplicadas na formulação integral do problema, conforme mostrado na Eq. (4). Desta forma, resulta-se em um sistema algébrico final, conforme apresentado a seguir:

$$([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]) \{\bar{\mathbf{X}}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (7)$$

A matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_e é obtida pela avaliação numérica das primeiras parcelas da Eq. (4), conforme apresenta-se a seguir na Eq. (8).

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L EA \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\} \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\}^T dx + \int_0^L EI_z \{\tilde{\mathbf{N}}_3''\} \{\tilde{\mathbf{N}}_3''\}^T dx \quad (8)$$

A matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_g é constituída pela soma das matrizes \mathbf{K}_0 e \mathbf{K}_1 , onde são caracterizadas pelas contribuições das parcelas dos esforços axiais, cisalhantes e flexionais, conforme posto a seguir:

$$\mathbf{K}_0 = \int_0^L {}^t F_x \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\} \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\}^T dx + \int_0^L {}^t F_x \{\tilde{\mathbf{N}}_3'\} \{\tilde{\mathbf{N}}_3'\}^T dx + \int_0^L {}^t F_x \frac{I_z}{A} \{\tilde{\mathbf{N}}_3''\} \{\tilde{\mathbf{N}}_3''\}^T dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 = & \int_0^L \left[{}^t M_1 + \Phi \frac{x}{L} \right] \{\tilde{\mathbf{N}}_3''\} \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\}^T dx + \int_0^L \left[{}^t M_1 + \Phi \frac{x}{L} \right] \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\} \{\tilde{\mathbf{N}}_3''\}^T dx + \dots \quad (10) \\ & + \int_0^L \left[\Phi \frac{1}{L} \right] \{\tilde{\mathbf{N}}_3'\} \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\}^T dx + \int_0^L \left[\Phi \frac{1}{L} \right] \{\tilde{\mathbf{N}}_1'\} \{\tilde{\mathbf{N}}_3'\}^T dx \end{aligned}$$

Além disso, Φ é definido como a soma dos momentos nas extremidades do elemento. Desta forma, definido as matrizes elementares elásticas e geométricas para cada barra do sistema

estrutural, realiza-se uma transformação para o sistema global por meio da matriz de rotação. Por fim, a matriz de rigidez global é construída pelo assemblamento das matrizes locais de cada elemento.

Na análise do comportamento não linear geométrica das estruturas, a todo instante, é necessário atualizar a matriz de rigidez, a fim de garantir a configuração de equilíbrio do sistema devido as mudanças em sua geometria. Neste contexto, a matriz de rigidez \mathbf{K} leva em consideração esses efeitos provenientes do comportamento não linear do problema, ou seja, pode-se condensar conceitualmente essa matriz como:

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{U}, \mathbf{S}) \quad (11)$$

Note que a Eq. (11) indica que a matriz de rigidez é função do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} e dos esforços internos \mathbf{S} . Sendo assim, a sistemática de solução de problemas não lineares, baseado nos procedimentos discretos de elementos finitos, transita pela avaliação numérica de um sistema de equações não lineares, direcionando a aplicação de uma metodologia baseada na combinação de estratégias incrementais e iterativas [40]. Em linhas gerais, o processo é constituído pela premissa de equilíbrio das forças externas e internas, conforme é expresso matematicamente pela Eq. (12).

$$\mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{S}) \cong 0 \quad (12)$$

Em que \mathbf{F}_i é o vetor de forças internas e \mathbf{F}_e é conhecido como vetor de forças externas, dado pelo produto entre o fator de carga e vetor de referência que contém as direções das forças aplicadas na estrutura.

2.1 Solução incremental predita

Considere-se conhecida todas as informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, a solução incremental predita ou solução incremental inicial tangente inicia pela construção da matriz de rigidez e a definição do vetor de deslocamentos nodais $\delta\mathbf{U}_r$, conforme posto a seguir:

$$\delta\mathbf{U}_r = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}_r\} \quad (13)$$

Sendo assim, deve-se estabelecer o incremento do carregamento $\Delta\lambda$, destacando que no passo inicial esse é predefinido pelo usuário no arquivo de entrada. Um método incremental eficiente deve ser capaz de identificar e escolher automaticamente o incremento de carga, visto que em problemas não lineares estruturais, existem a necessidade do conhecimento de pontos críticos contidos ao longo do caminho de equilíbrio da estrutura.

Existem diversas trabalhos desenvolvidos que abordam estratégias de incrementos de carga e investigações, como pode ser visto em detalhes nas obras de Silva [34], Yang e Kuo [40], Galvão [14], dentre outras. Na presente pesquisa adota-se a técnica incremental proposta por Crisfield [12], denominada comprimento de arco, definida pela Eq. (14).

$$\Delta\ell = {}^t\Delta\ell \sqrt{\frac{{}^tI_d}{{}^tI}} \quad (14)$$

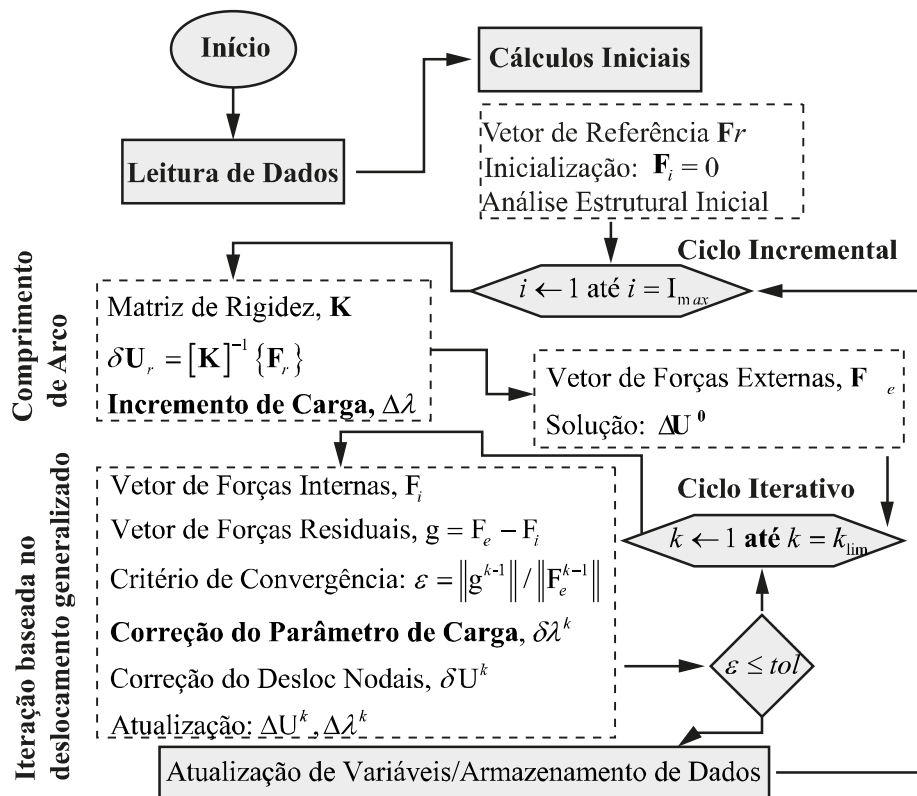


Figura 1: Estratégia computacional para análise de problemas não lineares estruturais

Em que $\Delta\ell$ e ${}^t\Delta\ell$ são, respectivamente, os comprimentos de arco incrementais no passo de carga corrente e anterior. I_d é o número de iterações desejadas definido pelo usuário e tI é o número de iterações até a convergência da solução no passo de carga anterior. Desta forma, o incremento de carregamento é expresso a seguir:

$$\Delta\lambda = \pm \frac{\Delta\ell}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r}} \quad (15)$$

O sinal contido na Eq. (15) é determinado com base no parâmetro GSP (*Generalized Stiffness Parameter*), dependente do vetor deslocamento nodal no primeiro passo de carga e no passo de carga anterior e corrente, conforme posto na Eq. (16).

$$\mathbf{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{U}_r^T {}^1\delta\mathbf{U}_r}{{}^t\delta\mathbf{U}_r^T {}^t\delta\mathbf{U}_r} \quad (16)$$

O parâmetro de rigidez apresentado na relação acima é negativo para os passos de carga situados próximos aos pontos limites do caminho de equilíbrio da estrutura. Sendo que para os demais pontos, ele é sempre positivo [40].

2.2 Ciclo de iterações

De acordo com Crisfield [12], grande parte das técnicas de solução de problemas estruturais com comportamento não linear fundamenta-se no método de Newton-Raphson. A Eq. (12) é usada como base dentro do processo iterativo, reescrevendo essa expressão, chega-se:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{S}) \cong 0 \quad (17)$$

Onde o termo \mathbf{g} representa o vetor de forças desbalanceadas ou residual. O processo iterativo busca minimizar a Eq. (17), quando atinge certa tolerância, pode-se afirmar que a estrutura encontrou uma configuração de equilíbrio.

No esquema padrão do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante ao longo de todo processo iterativo, possibilitando que a resposta seja obtida até o ponto limite e/ou bifurcação. Quando considera o parâmetro variável no processo iterativo é possível determinar todo o caminho de equilíbrio [3, 15]. Sendo assim, permitido a variação do parâmetro de carga, tem-se que os deslocamentos nodais iterativos podem ser representados pela seguinte equação de equilíbrio:

$$[\mathbf{K}]^{(k-1)} \{\delta \mathbf{U}\}^k = \mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k) \quad (18)$$

O índice $k \geq 1$ é o contador de iterações. Desta forma, como o parâmetro de carga é variável, deve-se calcular esse em cada iteração, conforme posto na Eq. (19).

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \delta \lambda^k \quad (19)$$

Onde $\delta \lambda^k$ é denominado como sendo a correção do fator de carga. Considerando o método convencional de Newton-Raphson, tem-se a solução trivial com $\delta \lambda^k = 0$ e é denominado como iteração a carga constante. Por outro lado, aplicando a estratégia proposto por Chan [9], a iteração baseada no deslocamento generalizado, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\delta \lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_g^k}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (20)$$

Sendo assim, baseado na Eq. (18) e na Eq. (20), pode-se explicitar o vetor de deslocamentos nodais iterativos, conforme posto na Eq. (21).

$$\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (21)$$

Os vetores de deslocamento associado ao vetor de forças desequilibradas e ao vetor de referência são dados a seguir:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (22)$$

$$\delta \mathbf{U}_r^k = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r \quad (23)$$

Neste contexto, como mencionado anteriormente, deve-se impor um valor aceitável de tolerância ζ ao sistema, predefinido pelo usuário antes da simulação. Dentre os critérios de convergência usados na literatura, considera-se a norma baseada no equilíbrio de forças, conforme posto na Equação (24).

$$\frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (24)$$

Sendo constituído pela razão das normas Euclidianas do vetor residual e as forças externas. Após a convergência for alcançada pode-se afirmar que a estrutura estabeleceu uma configuração de equilíbrio e, consecutivamente, as variáveis para os próximos incrementos são atualizadas. Em síntese, as etapas e os processos de implementação para problemas estruturais não lineares podem ser visualizados na Figura 1.

3 TESTES NUMÉRICOS DE APLICAÇÃO

Nesta seção são apresentadas as validações e as discussões da performance do programa computacional desenvolvido para análise estrutural não lineares. Para aferição dos resultados numéricos são utilizados soluções analíticas e dados de simulações computacionais disponíveis na literatura.

3.1 Pilar sujeito à carga vertical e força axial

O primeiro exemplo consiste um pilar fixado na base inferior com seção transversal de altura 1,27 cm, área com valor de 1,6129 cm², um comprimento igual a 254 cm e o módulo de elasticidade de 207 GPa. Na Figura 2(a) apresenta-se o croqui e a malha numérica utilizada no problema. Em relação aos resultados utilizados para comparação, usa-se a solução exata do problema, encontrado em Timoshenko e Gere [36]. Usa-se também os resultados numéricos via elementos finitos como comparação, obtidos em Cunha [13].

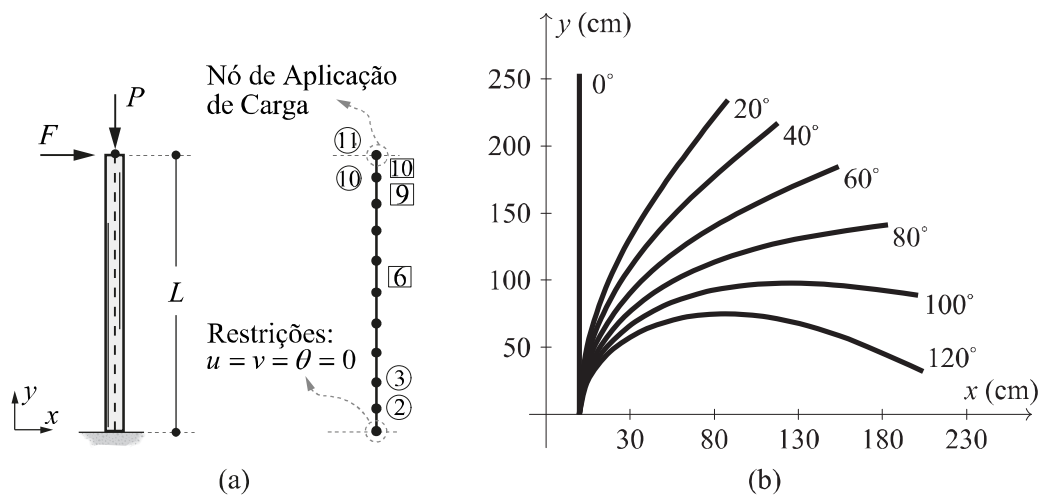


Figura 2: (a) Esquema do pilar com carga axial e vertical e modelo discreto de elementos finitos e (b) deformada da coluna para diferentes ângulos de rotação

Na Figura 2(b) busca-se verificar, de forma qualitativa, o comportamento deformacional do pilar para diferentes ângulos de rotação, nota-se que quanto maior a carga aplicada na estrutura, tem-se uma configuração deformada mais acentuada associada a uma maior rotação. Para as simulações, busca-se avaliar o comportamento do problema para diferentes razões de P/P_{cr} , visando extrair os resultados de deslocamento horizontal e vertical na extremidade livre da coluna.

Esse problema também foi estudado via métodos numéricos por Carvalho [8]. Inicialmente, analisa-se o deslocamento horizontal do pilar. A Tabela 1 apresenta uma comparação entre os valores dos deslocamentos horizontais, medido a partir da base fixada, obtidos com base em métodos numéricos e as previsões analíticas da literatura. Nota-se que usando um parâmetro de carga inicial igual a $1 \cdot 10^{-4}$ e 50 incrementos, têm-se resultados semelhantes com Timoshenko e Gere [36].

Tabela 1: Valores para deslocamento horizontal medido na extremidade do pilar para diferentes níveis de cargas aplicadas no elemento estrutural

P/P_{cr}	Timoshenko e Gere (1963)⁰	NASEN¹ (x/L)	Δ_1^0 (%)	Cunha (2017)²	Δ_2^0 (%)
1	1,000	1,000	5,14E-04	1,000	0,00E+00
1,015	0,970	0,970	3,04E-02	0,961	8,30E-01
1,063	0,881	0,881	2,17E-02	0,867	1,48E+00
1,152	0,741	0,741	5,04E-02	0,74	4,00E-02
1,293	0,560	0,562	3,84E-01	0,557	1,43E+00
1,518	0,349	0,351	6,97E-01	0,348	2,30E-01
1,884	0,123	0,124486	1,21E+00	0,123	5,20E-01

Tabela 2: Valores para deslocamento vertical medido na extremidade do pilar para níveis de cargas diferentes aplicadas no elemento estrutural

P/P_{cr}	Timoshenko e Gere (1963)⁰	NASEN¹ (y/L)	Δ_1^0 (%)	Cunha (2017)²	Δ_2^0 (%)
1	0,000	0,000	–	0	–
1,015	0,220	0,220	1,26E-01	0,23239	5,63E+00
1,063	0,422	0,423	3,21E-01	0,4434	5,07E+00
1,152	0,593	0,594	9,73E-02	0,59368	1,10E-01
1,293	0,719	0,719	5,66E-04	0,72058	2,20E-01
1,518	0,792	0,792	2,11E-02	0,79218	2,00E-02
1,884	0,803	0,803892	1,11E-01	0,80325	3,00E-02

A Tabela 2 expõem os resultados do comportamento da solução para os deslocamentos verticais, tomados a partir da base engastada do pilar. Desta maneira, os valores obtidos pelo programa NASEN mostram-se parelhos em relação aos resultados obtidos com a solução analítica, apresentando baixos níveis de erro.

3.2 Quadro em losango-quadrado fixada por pinos

Considere uma estrutura em formato de losango, com todas suas arestas iguais e de comprimento L , o sistema está sujeito à ação de cargas verticais, localizadas no vértice superior e inferior da peça. O problema proposto apresenta duas configurações, sendo elas em relação à natureza das cargas aplicadas na estrutura, conforme ilustra a Figura 3. A seção transversal é retangular com dimensões iguais a $1 \times 0,1$ m, o comprimento das arestas do losango é de 10 m e o módulo de elasticidade é igual a $1,2 \cdot 10^5$ kPa.

Adota-se também uma tolerância igual a 10^{-5} , um fator de carga inicial de 0,01 e 5 iterações desejadas. Em ambos os casos, busca-se avaliar os deslocamentos w e u presentes na estrutura. A solução de comparação é obtida em Mattiasson [17].

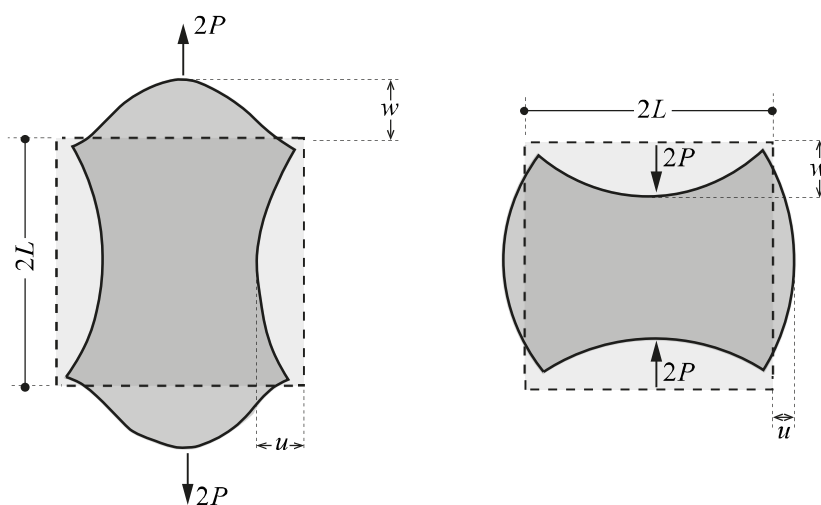


Figura 3: Quadro em formato de losango quadrado sob tração e compressão

Na Figura 4(a) e na Figura 4(b), apresentam as curvas dos deslocamentos adimensionais para a configuração da estrutura sujeita à ação de força de tração e de compressão, respectivamente. É possível observar uma boa concordância dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido no presente trabalho e os dados da literatura.

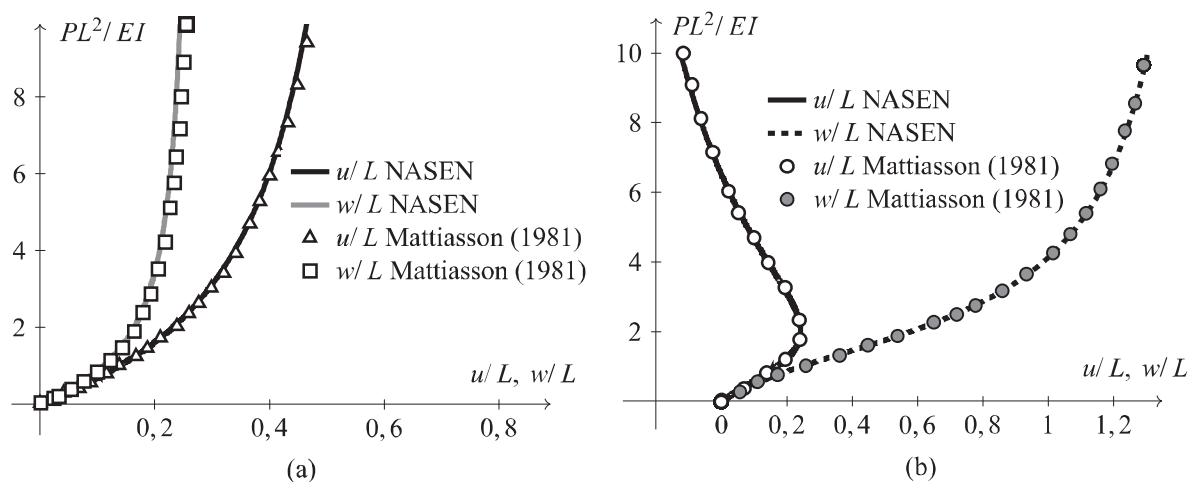


Figura 4: Curva carga-deslocamento para estrutura sob força de (a) tração e de (b) compressão.

Observa-se que para configuração de carga tracionada, atuando na estrutura, a solução não apresenta pontos críticos. Em contrapartida, quando se avalia o caso do quadro sujeito à força de compressão, nota-se o surgimento de um ponto limite de deslocamento próximo ao valor de 0,2 associado ao deslocamento horizontal.

3.3 Arco raso com carga centrada

Este exemplo representa um arco circular raso (ou abatido) rotulado em ambas as extremidades sujeito a um carregamento concentrado no centro da estrutura. Problemas dessa natureza são, frequentemente, objetos de análise e investigação de pesquisas, como pode ser visto em Yang e Kuo [40], Maximiano [18] e Silva [35].

A estrutura foi discretizada com 14 elementos, totalizando 15 nós na estrutura e o primeiro

incremento de carga é igual a 0,5. Adota-se uma tolerância de 10^{-5} , a seção transversal e momento de inércia são unitários, o comprimento é igual a 100 cm e a altura do arco é tomada como 10% desse valor.

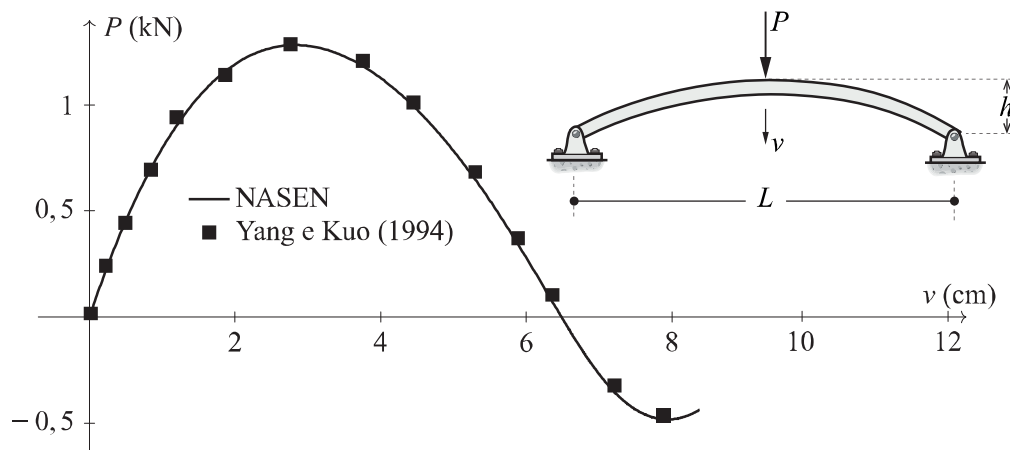


Figura 5: Características do problema e a trajetória de equilíbrio do arco raso sujeita à força concentrada

A verificação do comportamento da estrutura é realizada no ponto central do arco, onde se busca avaliar a sensibilidade do deslocamento vertical com a variação da carga. Na Figura 5, apresenta um trecho da trajetória de equilíbrio, sendo possível verificar facilmente os pontos limites de carga. Note também que a solução obtida pelo programa NASEN apresenta um comportamento satisfatório em relação os dados numéricos obtidos em Yang e Kuo [40]. Para verificar o comportamento do arco abatido submetido a diferentes níveis de solicitações, a Figura 6 apresenta a deformada do arco para alguns incrementos de carga.

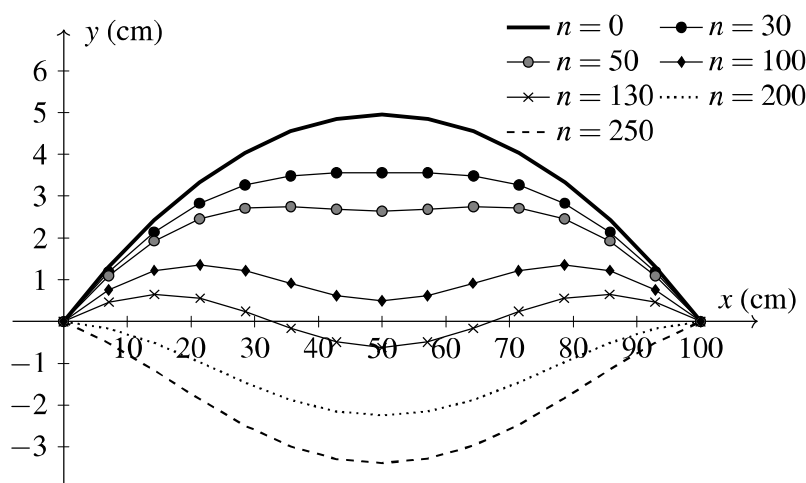


Figura 6: Configuração deformada do arco raso com carga centrada

3.4 Arco semicircular com carga simétrica

O exemplo estudado consiste em um arco circular sujeito a uma carga centrada, ou seja, nestas configurações trata-se de um sistema estrutural perfeito, conforme ilustrado na Figura 7. Os arcos são estruturas que apresentam fortes não linearidades e comportamentos que desper-

tam grande interesse científico, por exemplo, o fenômeno do *looping*. Sendo assim, podem-se destacar alguns trabalhos acerca do tema, como Yang e Kuo [40], Paraski [26] e Oliveira [23].

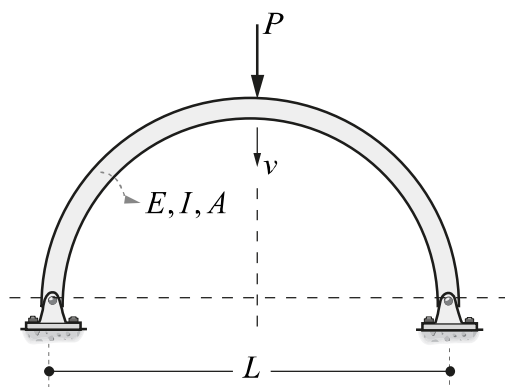


Figura 7: Arco semicircular circular com carga centrada

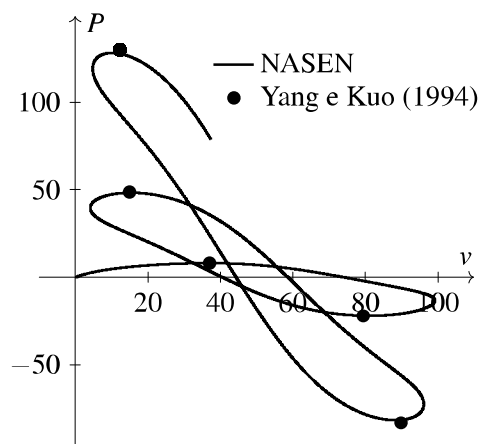


Figura 8: Curva carga x deslocamento vertical para arco semicircular sujeita à carga centrada

As propriedades consideradas na simulação computacional do caso teste são, primeiramente, o diâmetro do semicírculo igual a 100 cm, o momento de inércia é unitário e a seção transversal com área igual a 10 cm², a base e altura iguais a $\sqrt{30}/60$ e $2\sqrt{20}$, e o módulo de elasticidade é tomado igual a 2000 kN/cm².

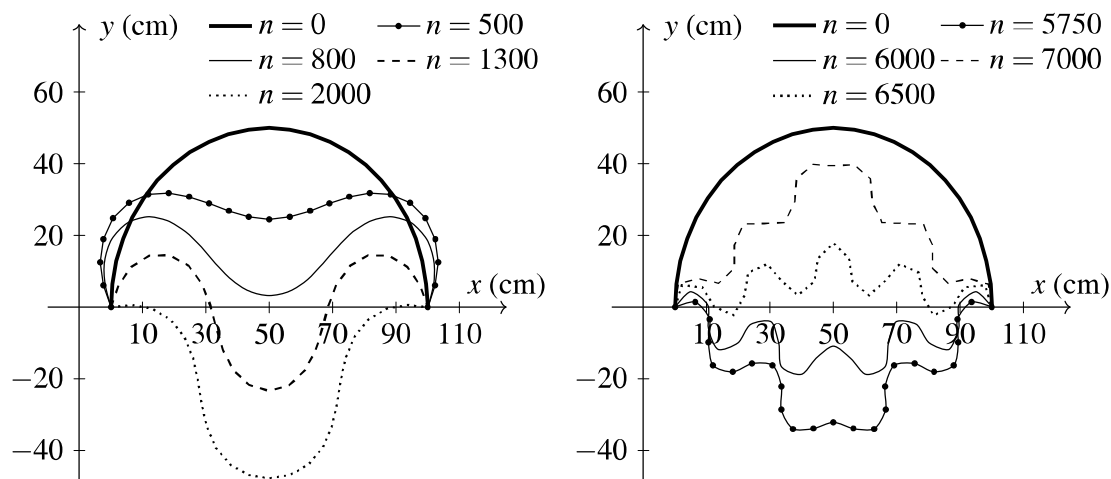


Figura 9: Configuração deformada do arco semicircular com carga simétrica para diferentes incrementos de carga

Em relação aos parâmetros preliminares de entrada do processo iterativo, adota-se uma tolerância de 10^{-5} e um incremento de carga inicial de $5 \cdot 10^{-3}$. Em relação às condições de vinculação, as extremidades do arco são restringidas em relação aos deslocamentos axiais e verticais, permitindo somente a rotação nestes pontos.

Na Figura 8 apresenta o caminho de equilíbrio da estrutura e destaca-se também os pontos limites de cargas obtidos na literatura, vide [40]. Note que os resultados obtidos pelo programa NASEN, quando comparados com a solução de referência, exibem um comportamento assertivo. A Figura 9 exhibe inúmeras configurações deformadas para níveis diferentes de incremento de carga.

4 CONCLUSÃO

Este estudo visou apresentar os principais aspectos dos procedimentos e as aplicações acerca do comportamento não linear geométrico de estruturas planas descritas por elementos unidimensionais. Para solução discreta do problema, adota-se o modelo computacional de elemento finito de pórtico plano, contendo três graus de liberdade por nó. A formulação é baseada no princípio dos deslocamentos virtuais, considerando o referencial Lagrangiano atualizado e a teoria de Euler-Bernoulli.

Os casos testes estudados buscaram apresentar níveis de complexidade e comportamentos físicos diferentes, uma vez que as estruturas podem exibir graus de não linearidade variados atrelados aos carregamentos e configurações dos elementos analisados. Em síntese, o programa computacional desenvolvido NASEN, apresentou um comportamento coerente com as previsões da literatura para os exemplos testados. Trabalhos futuros são impulsionados para a ampliação e melhoria do programa computacional desenvolvido para o tratamento de estruturas tridimensionais e outros efeitos de não linearidade importantes para engenharia estrutural.

REFERÊNCIAS

- [1] J. H. Argyris. *Recent advances in matrix methods of structural analysis. (Matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers)*. Macmillan Co., Pergamon Press, LTD., New York, 1964.
- [2] A. Avelino Filho. *Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE: análise não linear*. São Paulo: Érica, 2012.
- [3] J. L. Batoz e G. Dhatt. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(8):1262–1267, 1979.
- [4] P. G. Bergan. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers & Structures*, 12(4):497–509, 1980.
- [5] P. G. Bergan, G. Horrigmoe, B. Bråkeland e T. H. Søreide. Solution techniques for nonlinear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(11):1677–1696, 1978.
- [6] P. G. Bergan e T. Søreide. A comparative study of different numerical solution techniques as applied to a nonlinear structural problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2(2):185–201, 1973.
- [7] C. Brebbia e J. Connor. Geometrically nonlinear finite-element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 95(2):463–486, 1969.
- [8] M. F. M. S. Carvalho. *Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos*. Dissertação de mestrado, Universidade Nova, Lisboa, Portugal, 2010.
- [9] S. L. Chan. Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(12):2657–2669, 1988.
- [10] W. F. Chen. *Advanced analysis of steel frames: theory, software, and applications*. CRC press, 2018.
- [11] M. A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*, 13:55–62, 1981.
- [12] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley & Sons, 1991.
- [13] P. F. d. L. Cunha. *Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estrutu-*

- ras reticuladas*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE, Brasil, 2017.
- [14] A. S. Galvão. *Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, Brasil, 2004.
- [15] I. J. M. Lemes. *Estudo numérico avançado de estruturas de aço, concreto e mistas*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, Brasil, 2018.
- [16] R. H. Mallett e P. V. Marcal. Finite element analysis of nonlinear structures. *Journal of the structural division*, 94(9):2081–2106, 1968.
- [17] K. Mattiasson. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, 17(1):145–153, 1981.
- [18] D. P. Maximiano. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, Brasil, 2012.
- [19] J. L. Meek e H. S. Tan. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 47(3):261–282, 1984.
- [20] D. W. Murray e E. L. Wilson. Geometrically non-linear finite element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 95:143–165, 1969.
- [21] N. S. Neves. *Modelo computacional avançado para análise de estruturas sob ação de gradientes térmicos*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, 2019.
- [22] J. T. Oden. Numerical formulations of nonlinear elasticity problems. *Journal of the Structural Division*, 93(3):235–356, 1967.
- [23] G. C. Oliveira. *Aplicação do elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Brasília, Brasília – DF, Brasil, 2016.
- [24] C. Pacoste. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 156(1-4):75–110, 1998.
- [25] C. Pacoste e A. Eriksson. Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 144(1-2):163–197, 1997.
- [26] N. Paraski. *Análise estática não linear de pórticos planos via matlab*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda – RJ, Brasil, 2012.
- [27] G. Powell e J. Simons. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(10):1455–1467, 1981.
- [28] J. N. Reddy. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. OUP Oxford, 2014.
- [29] M. Rezaiee-Pajand, M. Ghalishooyan e M. Salehi-Ahmadabad. Comprehensive evaluation of structural geometrical nonlinear solution techniques part i: Formulation and characteristics of the methods. *Structural Engineering and Mechanics*, 48(6):849–878, 2013.
- [30] I. S. Ribeiro. *Análise não-linear geométrica de sistemas apertados planos com elementos de rigidez variável: aplicações em estruturas de aço e de concreto armado*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, Brasil, 2016.
- [31] E. Riks. The application of newton’s method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4):1060–1065, 1972.
- [32] A. Sabir e A. Lock. The applications of finite elements to large deflection geometrically

- nonlinear behaviour of cylindrical shells. In S.U. Press, editor, *Variational methods in engineering: proceedings on an international conference held at the University of Southampton*. 1972.
- [33] P. Sharifi e E. P. Popov. Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 97(5):1397–1412, 1971.
- [34] A. R. D. Silva. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, Brasil, 2009.
- [35] J. L. Silva. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, Brasil, 2016.
- [36] S. P. Timoshenko e J. M. Gere. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009.
- [37] M. J. Tuner, E. H. Drill, H. C. Martin e R. J. Melosh. Large deflection of structures subject to heating and external load. *Areospace Sciences*, 27:97–106, 1960.
- [38] L. T. Watson, S. C. Billups e A. P. Morgan. Algorithm 652: Hompack: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 13(3):281–310, 1987.
- [39] G. A. Wempner. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11):1581–1599, 1971.
- [40] Y. B. Yang e S. R. Kuo. *Theory and analysis of nonlinear framed structures*. Prentice Hall PTR, 1994.
- [41] Y. B. Yang e M. S. Shieh. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA journal*, 28(12):2110–2116, 1990.
- [42] O. C. Zienkiewicz. *The finite element in engineering science*. McGraw Hill, 1971.