

PILARES DE PONTES COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS E ELEVADA ALTURA, UMA ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA PELA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO E PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Wesley I. G. de Melo^{1*} e Normando P. Barbosa²

¹ *Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 52.171-900, PE, Brasil*

² *Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 58.051-900, PE, Brasil*

Palavras-chave: Técnica do Meio Contínuo (TMC), Teoria dos Painéis–Parede (TPP), Pilares de Pontes, Contraventamento por Lintéis, Método dos Elementos Finitos (MEF).

Resumo. Pilares de pontes de elevada altura tornam-se mais viáveis economicamente se modelados e dimensionados com seção transversal vazada, podendo inclusive adotar seções de paredes finas aberta numa das faces, face esta que pode ser contraventada ao longo da altura por lintéis espaçados. Tal modelo gera a ativação de esforços oriundos da ação conjunta da flexão e da torção, tornando-se relevante o estudo do centro de torção D , do empenamento e consequentes variação da rotação ϕ em torno do eixo axial em D e do bimomento. Para contribuir com a praticidade de implementação computacional apresenta-se neste artigo a resolução de pilar em formato de núcleo estrutural C pela Técnica do Meio Contínuo (TMC) em detrimento do Método dos Elementos Finitos (MEF). Procede-se, também, a resolução da equação diferencial decorrente da ação do vento em pilares e equacionada pela Teoria da Flexo–Torção (TFT), bem como é fornecido o elemento finito de barra para o pilar de paredes finas contraventado por lintéis. Com tais implementações verifica-se boa convergência entre o MEF, TFT e TPP em detrimento de casos particulares estudados por Smith e Taranath de 1972, com ordem média de aproximação de 98,04 %.

Endereços de e-mail: wesleyimperiano@hotmail.com*, nperazzob@yahoo.com.br.

BRIDGE COLUMNS WITH THIN-WALLED SECTION AND HIGH HEIGHT, A THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS BY THE CONTINUOUS MEDIUM TECHNIQUE AND THE FINITE ELEMENT METHOD

Keywords: Continuous Medium Technique (CMT), Wall Panel Theory (WPT), Bridge Columns, Bracing by Lintels, Finite Element Method (FEM).

Abstract. Columns of high height bridges become more economically viable if modeled and dimensioned with a cross-section cast and may even adopt thin-walled sections open on one side, which can be contravened along the height by spaced-apart lintels. Such a model generates the activation of efforts resulting from the joint action of flexion and torsion, making relevant the study of the center of torsion D , warpage and consequent variation of rotation ϕ around the D -axis and the two-axis. In order to contribute to the practicality of computational implementation, in this paper is present the resolution of the C-pillar by the Continuous Media Technique (CMT) is proposed in detriment of the Finite Element Method (FEM) for bridge pillars with thin-walled cross section. The differential equation resulting from the action of the wind on pillars and equated by the Flexo-Torsion Theory (TFT) is also solved, as well as the finite bar element is provided for the thin-walled column braced by lintels. With such implementations there is good convergence between the MEF, TFT and TPP to the detriment of particular cases studied by Smith and Taranath of 1972, with an average order of approximation of 98.04 %.

1 INTRODUÇÃO

A Técnica do Meio Contínuo (TMC) foi bastante utilizada até os anos 1990, sobretudo com aplicação em edifícios altos. Porém, com a disseminação dos computadores surgiram inúmeros programas computacionais de análise estrutural fazendo uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), de maior praticidade. Assim a TMC foi relativamente esquecida, daí a ausência de publicações recentes no tema. Nesta introdução apresentam-se referências relacionados ao projeto de pilares de paredes finas, indicando-se literatura na qual grande parte dos trabalhos fizeram uso da TMC, e por fim correlaciona-se tal técnica com o projeto de pilares de pontes.

A análise da flexo-torção em estruturas de paredes finas foi inicialmente postulada por Bazile Zakharovitch Vlassov, que em 1936 publica “*La statique des enveloppes*”, sua tese de doutorado. Continuando nos anos seguintes a estudar mais aprofundadamente as estruturas de paredes finas, no francês: “*membres en voiles minces*”. Rematando tais avanços na teoria geral dos elementos esbeltos de paredes finas através do livro publicado em 1940, reeditado em 1958 e transcrito para o francês em 1962, sob o título: “*pièces longues en voiles minces*” [32].

Na década de 70 do século XX ocorreu maciça contribuição ao tema flexo-torção em seções de paredes finas, através da TMC. As paredes acopladas foram analisadas em Gluck [7] e discutida tal análise por Wynhoven et al. [34]. Em seguida, por Smith e Taranath [27] analisam o problema da coluna com seção em U, reforçadas por abas, e submetidas à torção uniforme, sendo estudados o bimomento e a rotação em torno do eixo axial sob o centro de torção e proposto o contraventamento por lintéis com formação de rótula plástica no meio do vão. Em Wakabayashi e Yagui [33] as análises do núcleo estrutural são processadas mediante Teoria da Flexo-Torção (TFT) associada a análise matricial de estruturas, buscando-se assim, implementar em subsequentes estudos de edifícios altos.

No estudo de duas paredes finas acopladas mediante lintéis pode-se ressaltar Gluck e Gellert [8], Tso e Biswas [30, 31] e Danay et al. [6]. Na contribuição de único núcleo formado por seção de paredes finas e contraventado por lintéis (para edifícios altos), tem-se como indispensável citar Wakabayashi e Yagui [33] em conjunto com Heidebrecht e Smith [10]. Este último com a utilização de funções adimensionais para expressar o empenamento ϕ e suas conseguintes derivadas até a terceira ordem. Nestes trabalhos sempre foi desprezada a parcela da deformação por corte. A consideração de tal deformação, devido ao corte, é proposta em Serra e Yagui [26] e o efeito de carga axial aplicado no centro de cisalhamento em Yagui e Serra [37]. Porém ambos consideram cargas laterais constantes, não procedendo a análise da ação do vento, cuja atuação gera momento de torção variável na altura da estrutura.

O efeito da deformação por corte em seções de núcleos estruturais é analisado em Smith e Abate [28], porém detém-se na formulação pela TFT, não analisando o problema sob a ótica da Teoria dos Painéis–Parede (TPP). Nesta mesma linha de raciocínio cita-se Khan e Smith [11] que apresenta a solução analítica para seções abertas com distribuição de lintéis idênticos e repetidos ao longo da altura do pilar. O equacionamento do lintel, em ambos os artigos, não considera o lintel como viga e computa seu efeito no núcleo estrutural através da formação de rótula plástica no centro do vão. Assim é que neste artigo, procede-se o equacionamento do referido lintel mediante equações de Maney. Evitando-se a imposição (consideração) da ocorrência obrigatória da rotulação plástica no centro do vão do lintel (ver as equações de Maney em [15, 19]). Já em âmbito da produção de dissertações e teses brasileiras ressalta-se: Rachid [21] que apresenta a formulação da TFT via método energético e focado em determinar a carga crítica para flambagem lateral, das aqui mencionadas paredes finas de seção transversal aberta, já em Carvalho [4] incrementa-se o estudo da carga de flambagem.

Já, em Barbosa [1] tal contraventamento é analisado mediante imposição de cargas laterais constantes ao longo da altura. Para Marques [16] o núcleo estrutural é constituído por duas

paredes em formato de U e acopladas mediante lintéis unindo as abas das paredes, ficando submetido a momento de torção M_t no centro de gravidade do sistema. Por fim, em Costa [5] incrementa-se nos núcleos a fundação flexível mediante vinculação elástica. A análise dos efeitos de segunda ordem nos núcleos estruturais é realizada em Xavier [35] com cargas verticais distribuídas ao longo da altura, tanto para núcleos isolados contraventados ou não por lintéis, bem como de paredes em formato de U e acopladas mediante lintéis, sendo publicado com novo detalhamento em Xavier e Melo [36]. Anos mais tarde, Basttistelle [2] acresce na análise de 2ª ordem, o efeito das deformações axiais dos pilares, porém não aplica tal conceito aos núcleos estruturais (nos subseqüentes painéis-parede).

Em Ribeiro [22] estudam-se os núcleos mediante análise matricial do método dos deslocamentos e sua conseguinte associação tridimensional à pórticos, em seguida Yoshida [38] integra os núcleos estruturais aos pilares ou aos pendurais de aço. E a análise dinâmica da associação tridimensional de pórticos, núcleos e paredes via TMC é abordado em Laier [13]. Já para o devido desacoplamento do sistema de equações recorre-se a Rosman [23], realizando tal procedimento mediante traslado do sistema de referências para um sistema generalizado. No âmbito de livros é fundamental mencionar Smith e Coull [29], que no capítulo 13 dedica-se ao estudo de pilares de seções com paredes finas abertas e contraventadas por lintéis ou lajes. Nesta última publicação o problema é resolvido mediante a TMC, a TFT e o elemento finito via análise matricial com acoplamento da flexão e do empenamento, porém desprezando a deformação por corte. Por fim, Nemir [18] faz um apanhado detalhado de todas as hipóteses e equações envolvidas no fenômeno da flexo-torção, bem como resultados experimentais de cargas e momentos críticos. As referidas análises são procedidas para vigas contínuas e pórticos, em qual linha de raciocínio cita-se Kolbrunner [12].

Como mencionado neste estado da arte verifica-se que as análises procedidas até então são para pilares em núcleos estruturais sob formato de C, concentrando-se sempre em edifícios altos, onde as cargas são introduzidas a cada nível dos andares e torna-se irrelevante a torção no topo do edifício. No caso de pontes em vigas não há registros de tal contribuição, propondo-se neste artigo procedê-la pela TMC através da TPP e conseguinte validação numérica pelo MEF e por outros pesquisadores para cenários (estados de carga) particulares. No caso dos pilares de pontes verifica-se a carga lateral distribuída ao longo da altura, gerando o braço de alavanca entre o centro de carga (C.C.) e o centro de torção (D), e a decorrente ativação do fenômeno da flexo-torção.

Baseado no exposto, será aqui analisado o pilar em formato de núcleo estrutural C e com os painéis-parede compondo a seção de paredes finas. A seção será considerada aberta e submetida a carregamento vertical p distribuído ao longo do eixo axial e carga concentrada P no topo (oriunda da reação do tabuleiro da ponte no respectivo pilar de apoio e aplicada no centro de carga através da laje de transição). Ainda serão aplicados carregamentos laterais ao longo da altura e atuante no centro de carga, produzindo o momento de torção $m(x)$ no centro de torção (D). Na seção aberta de paredes finas será aplicada a teoria de painéis-parede considerando a possibilidade de contraventamento por lintéis, e para tanto, serão empregadas as equações de Maney. Desta forma, o problema será modelado propiciando a formação das rótulas plásticas em posição distinta do meio dos vãos dos lintéis. Adequando-se assim, a formação das rótulas plásticas de acordo com a localização do lintel na altura do pilar.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A análise do pilar com seção transversal de paredes finas pela TMC é procedida pela TPP. Assim, neste artigo procede-se a modelagem do pilar em formato de C pela TPP e a validação numérica é procedida pela TFT e pelo MEF de barra, acoplando a teoria da flexão e da torção.

Desta forma, apresentam-se neste referencial teórico a TFT aplicada pilares com seções de paredes finas em formato de C, bem como o MEF com elemento finito de barra.

2.1 Equação diferencial da flexo-torção

O empenamento é definido como o deslocamento relativo entre os pontos alinhados de uma seção transversal. Assim, são deslocamentos longitudinais gerados pela rotação elástica ϕ (em torno do centro de torção D), vide Figura 1. Para tal fenômeno, a primeira parcela da equação diferencial será a torção de Saint-Venant, conforme observa-se na Figura 2, e expressa por:

$$M_{ft} = M_{\omega} = -E \cdot C_{\omega} \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3}, \tag{1}$$

onde M_{ft} é o momento de flexo-torção, C_{ω} é a constante torsional por empenamento, E é o Módulo de Elasticidade Longitudinal e ϕ é a rotação em torno a D .

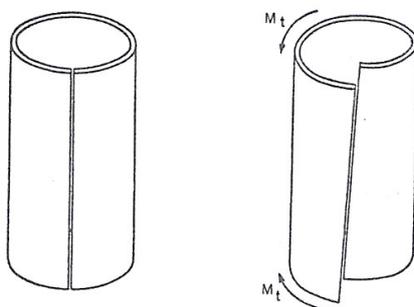


Figura 1: rotação ϕ em seção circular após deformação gerada pelo momento de torção M_t [25]

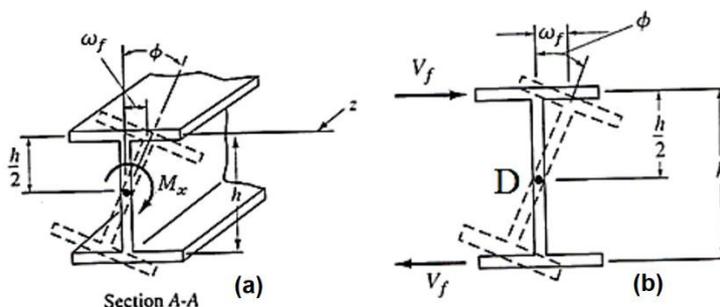


Figura 2: Torção de Saint-Venant: (a) rotação ϕ em torno do centro de torção ou cisalhamento D e (b) deslocamento ω_f na direção z . Adaptado de [24]

A segunda parcela da equação diferencial é oriunda do momento de torção livre e baseado em Langendonck, ver página 208 de [14], ficando expressa por:

$$M_s = G \cdot J \cdot \frac{d\phi}{dx}, \tag{2}$$

onde M_s é o momento da torção livre, $J = I_t$ é o momento de inércia torsional e G é o módulo de elasticidade transversal.

Enfim, somam-se as Eq. (1) e (2), e escreve-se a equação diferencial da torção M_x (em torno do centro de torção D), como:

$$\frac{d^3 \phi}{dx^3} - \frac{G \cdot J}{E \cdot C_{\omega}} \cdot \frac{d\phi}{dx} = -\frac{M_x}{E \cdot C_{\omega}}, \tag{3}$$

onde $M_x = M_t$ é o momento de torção.

No processo de giro da seção transversal (através do ângulo ϕ) observa-se que o ponto Q , vide Figura 3a, passa para a posição Q' e será adotada a teoria das pequenas deformações. Isso resultando no arco: $QQ' = r \cdot \phi$ e, em consequente, o deslocamento v . Donde a semelhança de triângulos entre o deslocamento v e o raio n , vale:

$$\frac{v}{r \cdot \phi} = \frac{n}{r}, \quad (4)$$

onde v é o deslocamento na direção da ordenada do eixo esqueleto s e n é a distância perpendicular entre a tangente ao ponto Q e o centro de torção D . O deslocamento v e a as derivadas temporais v' e ϕ' estão relacionados por:

$$\begin{aligned} v &= n \cdot \phi, \\ v' &= n \cdot \phi'. \end{aligned} \quad (5)$$

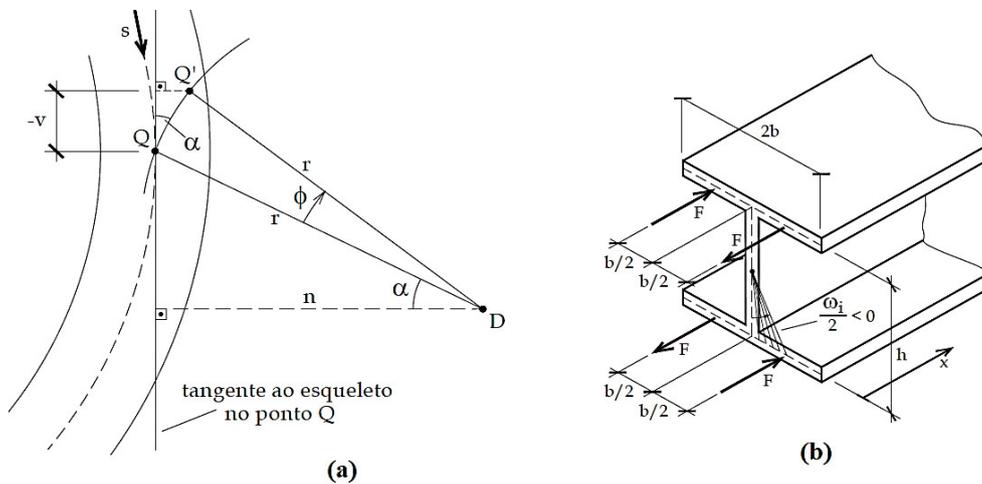


Figura 3: Teoria de Flexo-Torção: (a) esquema do giro da seção e (b) binário de forças equivalente ao bimomento [17]

Analisando o ângulo de distorção γ do elemento diferencial e o considerando nulo, bem como combinando-se tal consideração com a Eq. (4), em conjunto da hipótese dos deslocamentos longitudinais u dependerem unicamente do eixo esqueleto s . Conclui-se, após a devida integração ao longo do eixo esqueleto s e considerando a convenção positiva de sinais no posicionamento do centro de torção D , que:

$$u = \omega_{pc} \cdot \phi', \quad (6)$$

do qual, ω_{pc} é a Área setorial principal, e é cotado no diagrama de ordenadas setoriais.

Ressalta-se ainda na Figura 3b, o conceito de Bimomento B introduzido por Vlasov [32], sendo este semelhante ao binário de forças auto-equilibrantes, sem a repercussão de esforços internos do tipo normal ou cisalhante, vide Proença [20], mais especificamente na página 305. Assim, o bimomento fica expresso por:

$$B = \int_S \sigma_x \cdot \omega_{pc} \cdot dS. \quad (7)$$

Ao utilizar a definição de tensão normal ($\sigma_x = E^* \cdot \varepsilon_x$), e admitindo-se a deformação específica ε_x , tem-se o bimomento relacionado com o empenamento ϕ , como:

$$B = E \cdot I_{\omega} \cdot \phi'' , \quad (8)$$

sendo $I_{\omega} = C_{\omega} = \int_S \omega_{pc}^2 \cdot dS$ o momento de inércia setorial.

Combinando-se as Eq. (1) e (8), fica então estabelecida a relação entre o bimomento B e o momento de flexo torção M_{ft} , expressa por:

$$M_{ft} = -B' . \quad (9)$$

Desta feita, a equação diferencial em termos da rotação da seção ϕ , expressa na Eq. (3), pode ser reescrita com notação simplificada de derivadas, por:

$$G \cdot I_t \cdot \phi' - E \cdot I_{\omega} \cdot \phi''' = M_t . \quad (10)$$

Aplicando-se a combinação das Eq. (1) e (9) na Eq. (10) e, em seguida, derivando-a em relação ao eixo longitudinal x , exprime-se a equação diferencial da flexo-torção, em termos do bimomento B , por:

$$\left(\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_{\omega}} \right) \cdot B - B'' = M_t' = m . \quad (11)$$

sendo m o Momento de torção distribuído ao longo do eixo axial x . A convenção positiva dos esforços estudados é apresentada na Figura 4 e em [17].

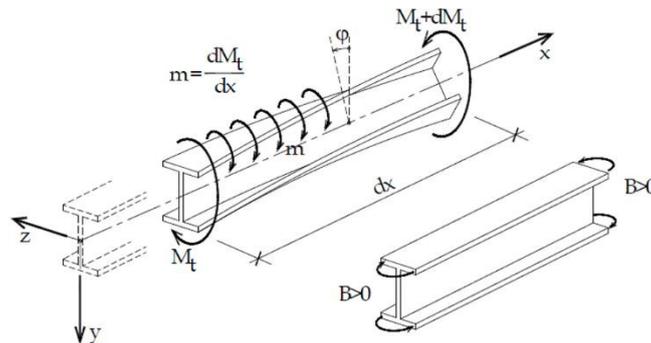


Figura 4: Notação positiva para as variáveis M_t , m , ϕ e B (adaptado de [17])

2.2 Solução da EDO pela TFT para carga lateral uniformemente na altura

Mediante solução de equações diferenciais, cujos procedimentos constam em Boyce e Dippima [3], procede-se a solução da EDO do problema de flexo-torção em termos das rotações (Eq. (10)), ficando a solução expressa por:

$$\phi(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + C_4 \cdot \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{m}{2 \cdot G \cdot I_t} \cdot x^2 , \quad (12)$$

$$\text{com } r = \sqrt{\frac{E \cdot I_{\omega}}{G \cdot I_t}} = \sqrt{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{I_{\omega}}{I_t}} .$$

Alterando-se a equação diferencial para termos do bimomento, vide Eq. (11), expressa-se por solução:

$$B = A_1 \cdot \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + A_2 \cdot \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + r^2 \cdot m . \quad (13)$$

Para a análise do pilar de ponte, tem-se como estado de carga: submissão a carga vertical P

concentrada no topo e decorrente da reação do tabuleiro, a atuação da carga uniformemente distribuída p na altura e oriunda do peso-próprio, além da carga lateral q_1 uniforme e aplicada no centro de carga CC. Resultando então, em momento de torção m distribuído e gerado pela carga q_1 , sendo decorrência da excentricidade (e_z) do CC até o centro de torção D . Vide a indicação do momento de torção m na Figura 5.

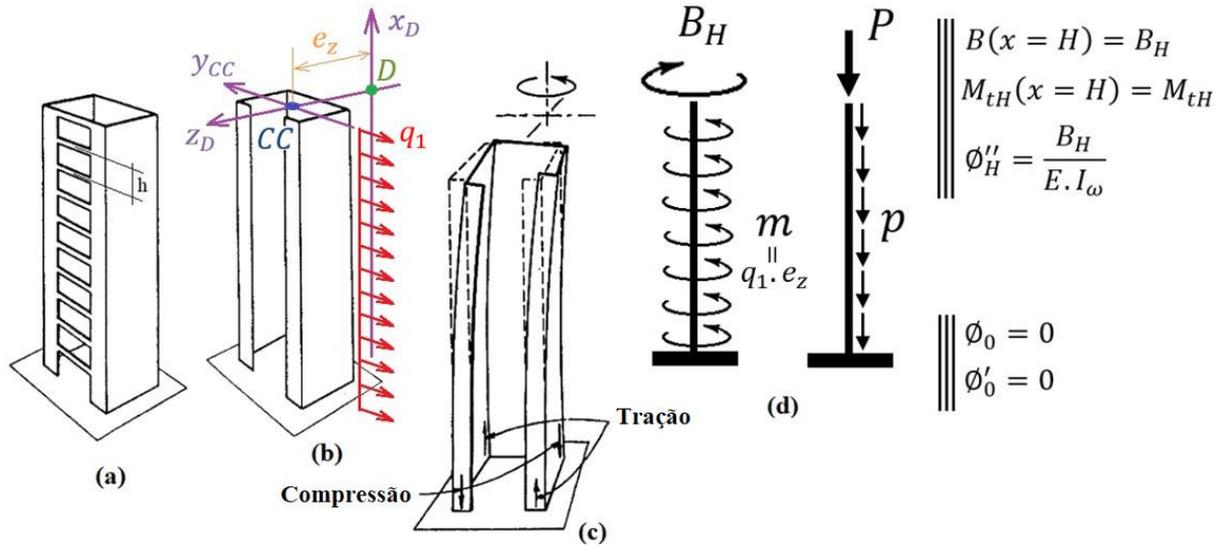


Figura 5: Pilar de ponte: (a) com contraventamento por lintéis, (b) sem lintéis, (c) deformado e (d) condições de contorno (adaptado de [29])

A análise procedida nesse subtópico é avanço do estudo procedido por Barbosa [1] em núcleos estruturais em edifícios altos. Ampliando-se neste artigo aos pilares de pontes, nos quais são modificadas algumas condições de contorno, mais especificamente no topo do pilar. Tem-se como discrepância mais relevante, a ação concentrada de bimomento no topo (ao invés de distribuído na altura como se verifica nos edifícios altos).

A solução da EDO expressa na Eq. (10) para o pilar apresentado na Figura 5, em termos das rotações ϕ , fica expressa por:

$$\phi(x) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x^2, \quad (14)$$

sendo $l \in I_L$ o comprimento e o momento de inércia à flexão do lintel, respectivamente, h a distância relativa entre dois lintéis, A_i a área interna ao eixo esqueleto s , $\alpha = \alpha_1$ quando do caso de seções de paredes finas aberta (sem lintéis), $\alpha = \alpha_2$ para seções de paredes finas contraventada por lintéis, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t \cdot h + k^*}{h \cdot E \cdot I_\omega}}$, $k^* = \frac{48 \cdot E \cdot I_L \cdot A_i^2}{l^3}$ e $I_L = \frac{e_L \cdot h_L^3}{12}$.

Aplica-se na Eq. (14) as condições de contorno presentes na Figura 5d, escreve-se a rotação ϕ , em termos de funções adimensionais β , sob a seguinte equação:

$$\phi = -\frac{m \cdot H^4}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^4} \cdot \beta_1 + \frac{B_H \cdot H^2}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^2} \cdot \beta_2 - \frac{M_{tH} \cdot H^3}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^3} \cdot \beta_3, \quad (15)$$

sendo B_H e M_{tH} o bimomento e o momento de torção no topo do pilar da ponte, respectivamente, H a altura total do pilar da ponte, $\xi = \frac{x}{H}$, $\beta = f(\xi)$, $\beta_1 = -\left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha \cdot H \cdot \xi)}{\cosh(\alpha \cdot H)} \right\} +$

$$(\alpha \cdot H) \cdot \tanh(\alpha \cdot H) \cdot [1 - \cosh(\alpha \cdot H \cdot \xi)] + (\alpha \cdot H)^2 \cdot \left[\frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{\sinh(\alpha \cdot H \cdot \xi)}{(\alpha \cdot H)} \right], \quad \beta_2 = \frac{1}{\cosh(\alpha \cdot H)} \cdot [-1 + \cosh(\alpha \cdot H \cdot \xi)] \text{ e } \beta_3 = -[\sinh(\alpha \cdot H \cdot \xi) - \cosh(\alpha \cdot H \cdot \xi) \cdot \tanh(\alpha \cdot H) - (\alpha \cdot H) \cdot \xi].$$

Nas Figuras de 6 a 8 são apresentadas graficamente as funções adimensionais β_1 , β_2 e β_3 , respectivamente. As curvas são geradas em decorrência da variação do adimensional αH .

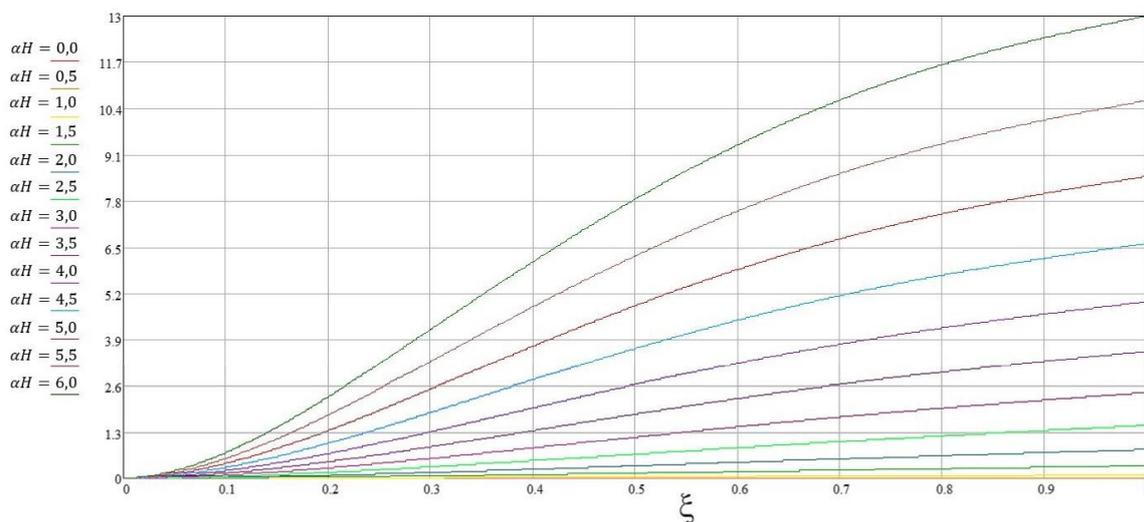


Figura 6: Representação gráfica de β_1 por variação de αH em detrimento de ξ

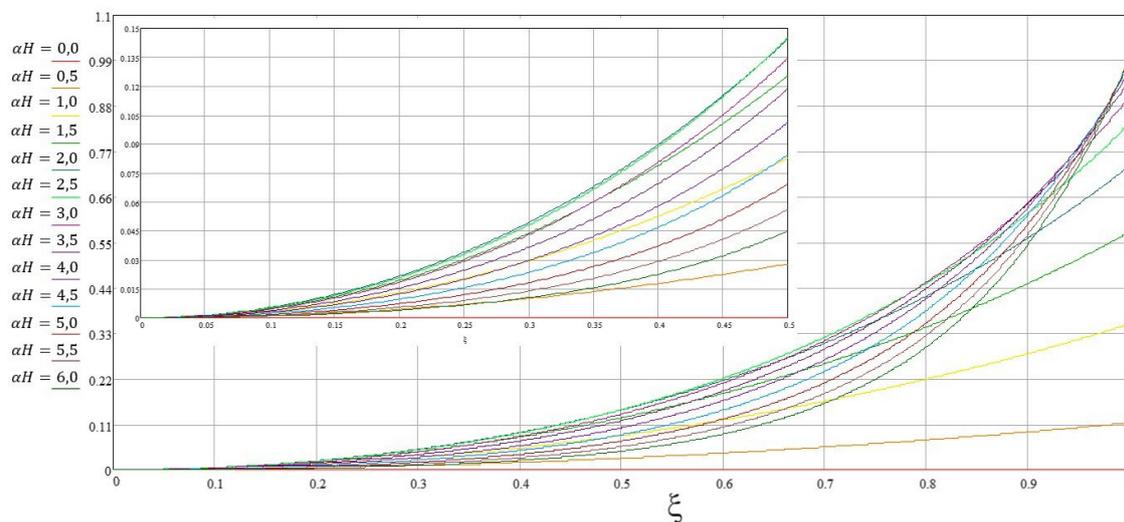


Figura 7: Representação gráfica de β_2 por variação de αH em detrimento de ξ

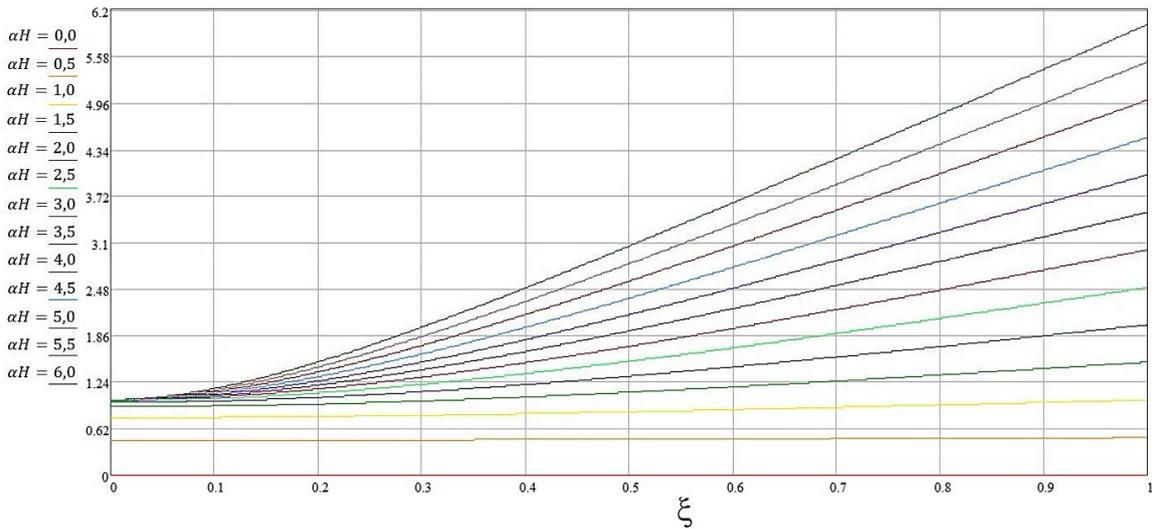


Figura 8: Representação gráfica de β_3 por variação de αH em detrimento de ξ

2.3 Elemento Finito de barra para a seção transversal em formato de paredes finas C

Baseado em Smith e Coull [29], em Heidebrecht e Swift [9] e na contribuição de Barbosa [1], a análise matricial será empregada para a implementação do modelo em Elementos Finitos, este oriundo do método dos deslocamentos, com elementos de barra com comprimento h (definida de forma a distribuir os lintéis uniformemente na altura do pilar). Quanto ao enrijecimento de cada elemento finito, será adotado a ligação do topo dos painéis–parede (4) e (5), vide Figura 12a, por um lintel. Define-se então, painéis–parede como membros lineares com sete graus de liberdade por extremidade do elemento de parede, sendo cinco devido a flexão (vide Figura 9a) e os dois restantes: o bimomento e o momento de torção, ambos pertinentes à flexo–torção (vide Figura 9b).

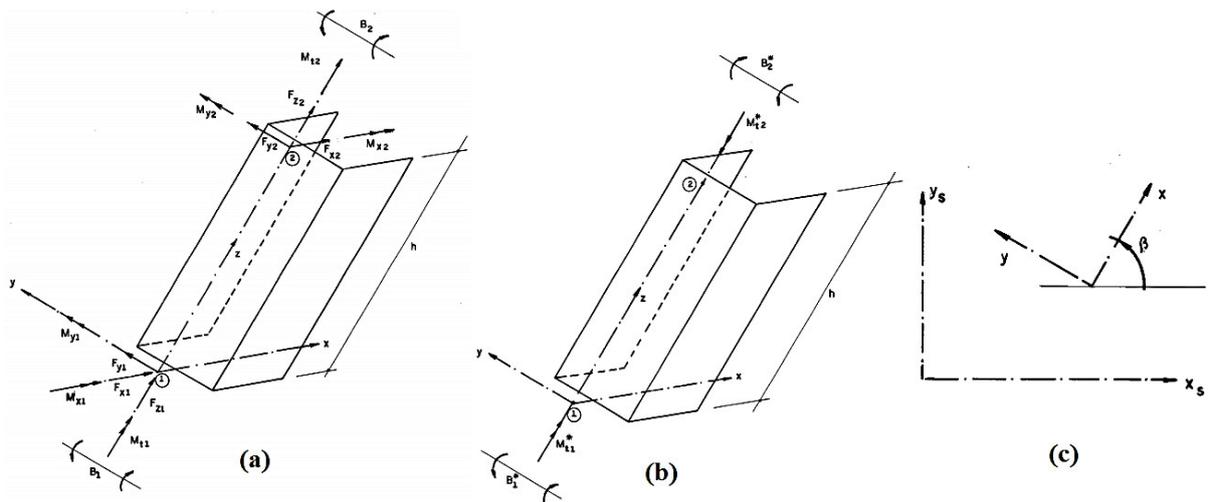


Figura 9: Elementos Finitos (a) Esforços solicitantes na Flexão, (b) Esforços solicitantes na flexo–torção e (c) transformação de eixos locais para o sistema global de referência [1]

Implementando-se a rotação do sistema de coordenadas locais para o sistema global de referências, mediante ângulo β apresentado na Figura 9c, o sistema de equações de equilíbrio, com a devida matriz de rigidez englobando a flexão associada à torção, é expresso por:

$$\{F\} = [T_S]^T \cdot [K_{FT}] \cdot [T_S] \cdot \{D\}, \quad (16)$$

sendo $\gamma = \frac{G \cdot I_t}{2 - 2 \cdot \cosh(\alpha \cdot h) + (\alpha \cdot h) \cdot \sinh(\alpha \cdot h)}$, $[K_S] = [T_S]^T \cdot [K_{FT}] \cdot [T_S]$,

$$\{F\}^T = \{F_{z_i} \quad F_{y_i} \quad F_{x_i} \quad M_{z_i} \quad M_{y_i} \quad M_{t_i} \quad B_i \quad F_{z_f} \quad F_{y_f} \quad F_{x_f} \quad M_{z_f} \quad M_{y_f} \quad M_{t_f} \quad B_f\},$$

$$\{D\}^T = \{\omega_i \quad v_i \quad u_i \quad \theta_{z_i} \quad \theta_{y_i} \quad \phi_i \quad \phi'_i \quad \omega_f \quad v_f \quad u_f \quad \theta_{z_f} \quad \theta_{y_f} \quad \phi_f \quad \phi'_f\}, r, t, b, k \text{ e } a$$

coeficientes pertencentes as equações de Maney, $[T_S] = \begin{bmatrix} [\bar{T}_S]_{7 \times 7} & [0]_{7 \times 7} \\ [0]_{7 \times 7} & [\bar{T}_S]_{7 \times 7} \end{bmatrix}$,

$$[\bar{T}_S] = \begin{bmatrix} [\bar{T}_{S_1}]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 4} \\ [0]_{4 \times 3} & [\bar{T}_{S_2}]_{4 \times 4} \end{bmatrix}, [\bar{T}_{S_1}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\bar{T}_{S_2}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[K_{FT_{11}}] =$$

$$\begin{bmatrix} t_z & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 & 0 \\ 0 & t_y & 0 & b_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & r \cdot y_{CG} & -r \cdot z_{CG} & 0 & 0 \\ 0 & -b_z & r \cdot y_{CG} & r \cdot y_{CG}^2 - k_z & r \cdot y_{CG} \cdot z_{CG} & 0 & 0 \\ b_y & 0 & -r \cdot z_{CG} & -r \cdot y_{CG} \cdot z_{CG} & r \cdot z_{CG}^2 - k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & \gamma \cdot [\cosh(\alpha \cdot h) - 1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \cdot [\cosh(\alpha \cdot h) - 1] & \gamma \cdot \left[h \cdot \cosh(\alpha \cdot h) - \frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} \right] \end{bmatrix}$$

e

$$[K_{FT_{12}}] =$$

$$\begin{bmatrix} -t_z & 0 & 0 & 0 & -b_z & 0 & 0 \\ 0 & -t_y & 0 & b_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & -r \cdot y_{CG} & r \cdot z_{CG} & 0 & 0 \\ 0 & -b_z & -r \cdot y_{CG} & -r \cdot y_{CG}^2 - a_z & r \cdot y_{CG} \cdot z_{CG} & 0 & 0 \\ -b_y & 0 & r \cdot z_{CG} & r \cdot y_{CG} \cdot z_{CG} & -r \cdot z_{CG}^2 - a_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot \alpha \cdot \sinh(\alpha \cdot h) & \gamma \cdot [\cosh(\alpha \cdot h) - 1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \cdot [\cosh(\alpha \cdot h) - 1] & \gamma \cdot \left[\frac{\sinh(\alpha \cdot h)}{\alpha} - h \right] \end{bmatrix}$$

Para compor a matriz $[K_{FT_{22}}]$ basta que sejam trocados sinais dos elementos de posição (1,5), (2,4), (5,1), (6,7) e (7,6) da matriz $[K_{FT_{11}}]$. E para montar a matriz $[K_{FT_{21}}]$, faz-se o mesmo procedimento tomando por base a matriz $[K_{FT_{12}}]$. Reforçando que o coeficiente γ é obtido na dedução da matriz de rigidez para o fenômeno de flexo-torção.

Para os lintéis definem-se os eixos y_L ; x_L e z_L , dos quais z_L é paralelo aos eixos coordenados x_{DL} e x_G . Onde estes dois últimos são eixos orientados positivamente para cima e localizados no Centro de Torção D . Desta forma, os eixos locais dos lintéis são y_L , x_L e z_L que são tidos paralelos aos eixos locais do pilar em núcleo no Centro de Torção D (z_{DL} , y_{DL} e x_{DL}). E por fim, via transformação apresentada na Figura 9c com ângulo β , tem-se definidos os eixos de referência global (z_G , y_G e x_G). Desta feita, escreve-se como lei de transformação do sistema do lintel para o Centro de Torção, a seguinte:

$$\{D_{DL}\} = [\bar{T}_L] \cdot \{D_L\}, \quad (17)$$

sendo $\{D_{DL}\}^T = \{z_{DL} \quad y_{DL} \quad x_{DL}\}$, $\{D_L\} = \{y_L \quad x_L \quad z_L\}$ e $[\bar{T}_L] = [I]_{3 \times 3}$.

O sistema de equações via o método dos deslocamentos para os lintéis é, para seis graus de liberdade por nó, expresso por:

$$\{F_L\} = [K_L] \cdot \{D_L\}, \quad (18)$$

sendo $\{F_L\}^T = \{\{F_{L_i}\}^T \quad \{F_{L_f}\}^T\}$; $\{D_L\}^T = \{\{D_{L_i}\}^T \quad \{D_{L_f}\}^T\}$; $[K_L] = \begin{bmatrix} [K_{L11}] & [K_{L12}] \\ [K_{L21}] & [K_{L22}] \end{bmatrix}$,
 $\{F_L\}^T = \{F_{y_{Li}} \quad F_{x_{Li}} \quad F_{z_{Li}} \quad M_{y_{Li}} \quad M_{x_{Li}} \quad M_{z_{Li}} \quad F_{y_{Lf}} \quad F_{x_{Lf}} \quad F_{z_{Lf}} \quad M_{y_{Lf}} \quad M_{x_{Lf}} \quad M_{z_{Lf}}\}$,
 $\{D_L\}^T = \{v_{Li} \quad u_{Li} \quad \omega_{Li} \quad \theta_{y_{Li}} \quad \theta_{x_{Li}} \quad \theta_{z_{Li}} \quad v_{Lf} \quad u_{Lf} \quad \omega_{Lf} \quad \theta_{y_{Lf}} \quad \theta_{x_{Lf}} \quad \theta_{z_{Lf}}\}$, t_L , r_L ,
 b_L , k_L , a_L e \hat{s}_L coeficientes oriundos das equações de Maney aplicados aos lintéis. Ressalta-se que as matrizes $[K_{L22}]$ e $[K_{L21}]$ serão obtidas mediante troca de sinal dos elementos (1,6); (3,4); (4,3) e (6,1) das matrizes $[K_{L11}]$ e $[K_{L12}]$, respectivamente;

$$[K_{L11}] = \begin{bmatrix} t_{yL} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{zL} \\ 0 & r_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{zL} & -b_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{yL} & k_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{s}_L & 0 \\ b_{zL} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{zL} \end{bmatrix} \text{ e } [K_{L12}] = \begin{bmatrix} -t_{yL} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{zL} \\ 0 & -r_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_{zL} & b_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{yL} & a_{yL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{s}_L & 0 \\ -b_{zL} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{zL} \end{bmatrix}.$$

A transformação de coordenadas do sistema de referência local do lintel (índice L) para o Centro de Torção (índice DL) é realizada mediante transformação quadrática na matriz de rigidez $[K_L]$ para $[K_{LD}]$. Ficando a matriz de rigidez, referenciada no centro de torção, expressa por:

$$[K_{LD}] = [T_L]^T \cdot [K_L] \cdot [T_L], \quad (19)$$

sendo $[T_L] = [I]_{12 \times 12}$. Considerando os deslocamentos lineares e angulares nas extremidades do lintel e correlacionando-os com o Centro de Torção D , isto mediante matriz de correlação $[R_{L1}]$ para os deslocamentos $\{D_{L1}\}$ no extremo inicial do lintel e $[R_{L2}]$ para o extremo final do lintel, escreve-se:

$$\{F\} = [K_{LD}^*] \cdot \left\{ \begin{matrix} \{D_i\} \\ \{D_f\} \end{matrix} \right\}, \quad (20)$$

sendo $[K_{LD}^*] = [R_L]^T \cdot [K_{LD}] \cdot [R_L]$, $\{D_{L1}\} = [R_{L1}] \cdot \{D_i\}$, $\{D_{L2}\} = [R_{L2}] \cdot \{D_f\}$, $[R_L] =$

$$\begin{bmatrix} [R_{L1}] & [0] \\ [0] & [R_{L2}] \end{bmatrix} \text{ e } [R_{L1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_D - z_{L1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_D - y_{L1} & -(z_D - z_{L1}) & 0 & 0 & -\omega_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_D - y_{L1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y_D - y_{L1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z_D - z_{L1} \end{bmatrix},$$

(y_D, z_D) , (y_{L1}, z_{L1}) e (y_{L2}, z_{L2}) as Coordenadas do Centro de Torção e do extremo inicial e final do lintel em relação a origem adotada, e ω_1, ω_2 as cotas no diagrama ordenadas setoriais.

Para montar a matriz $[R_{L2}]$ basta substituir o índice L_1 por L_2 e a ordenada ω_1 por ω_2 na matriz $[R_{L1}]$. Por fim, na Eq. (16) tem-se definida a matriz de rigidez do pilar no sistema global $[K_S]$ e na Eq. (20) expressa-se a matriz de rigidez dos lintéis que procedem o travamento a distâncias espaçadas de h . Desta feita, unifica-se a matriz $[K_D]$ como a matriz de rigidez do elemento de pilar em conjunto com os lintéis extremos. Para tal composição, faz-se a superposição dos termos do empenamento ϕ' dos lintéis, no caso os elementos de posição (7,7), (7,14), (14,7) e (14,14) de matriz $[K_{LD}]$. O procedimento de superposição é válido pois os lintéis

fazem o travamento/ligação de duas paredes do mesmo pilar em núcleo estrutural. Assim, expressando-se como:

$$[K_D] = [K_S] + [K_{LD}]_{empenamento} \quad (21)$$

3 SOLUÇÃO DA EDO VIA TFT PARA A AÇÃO DO VENTO SOB A FORMA DE CARGA LATERAL VARIÁVEL AO LONGO DO EIXO AXIAL DO PILAR

A equação diferencial que rege a flexo-torção é advinda da união das parcelas do momento de torção livre M_t e da torção de Saint-Venant, ficando expressa por:

$$\phi'' - r^2 \cdot \phi'''' = \frac{m(x)}{G \cdot I_t} \quad (22)$$

Será admitida a possibilidade de carga transversal constante na altura q_1 e de carga sob variação linear na altura do pilar $q_2(x) = (q_2/H) \cdot x$; bem como carga concentrada Q no topo do referido pilar. Conduz-se assim, o momento de torção $m(x) = A \cdot x + B$ sob variação linear em relação ao centro de torção. As cargas são aplicadas no centro de carga (CC) e em decorrência da excentricidade e quantifica-se o momento de torção, vide Figura 10.

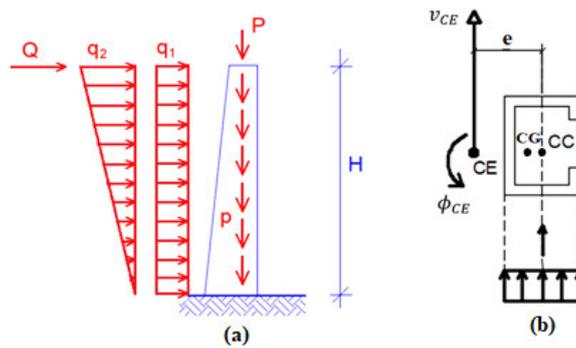


Figura 10: Pilar de ponte: (a) carregamentos, (b) centros geométricos ($CE \equiv D$), CC e CG

A solução geral para a equação diferencial expressa na Eq. (22), é:

$$\phi(x) = C_3 \cdot [\cosh(\alpha \cdot x) - 1] + C_2 \cdot \left[x - \frac{\sinh(\alpha \cdot x)}{\alpha} \right] + \frac{(A \cdot x^3 + 3 \cdot B \cdot x^2)}{6 \cdot \alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega}, \quad (23)$$

onde $C_2 = \frac{A \cdot [2 - (\alpha \cdot H)^2]}{2 \cdot \alpha^4 \cdot E \cdot I_\omega} - 2 \cdot \alpha^2 \cdot (M_{tH} + B \cdot H)$, $q_{1y} = q_1 \cdot \cos(\theta_G)$, $q_{2y} = q_2 \cdot \cos(\theta_G)$, $C_3 = \frac{\alpha^2 \cdot [\alpha \cdot B_H - M_{tH} \cdot \sinh(\alpha \cdot H)] + A \cdot k_1 + B \cdot \alpha \cdot [1 + (\alpha \cdot H) \cdot \sinh(\alpha \cdot H)]}{\alpha^5 \cdot E \cdot I_\omega \cdot \cosh(\alpha \cdot H)}$, $A = -\left(\frac{q_{2y}}{H}\right) \cdot e_z$, $B = -q_{1y} \cdot e_z$, $k_1 = \left\{ 1 - \frac{(\alpha \cdot H)^2}{2} \cdot \sinh(\alpha \cdot H) \right\}$ e e_z é a distância no eixo z_{DL} entre o centro de carga (CC) e o centro de torção (D).

Procede-se assim, a extensão da TFT apresentada em Mori e Munaiar Neto [17] para momento de torção $m(x)$ sob função linear. Tal extensão é realizada para computar a ação do vento na referida teoria, uma vez que o carregamento oriundo do vento é expresso na Figura 11.

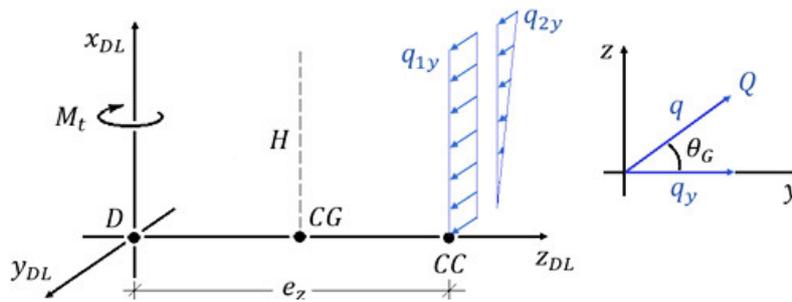


Figura 11: Convenção positiva do momento de torção M_t e do braço de alavanca e_z

4 TPP APLICADA A PILARES SOB FORMA DE C E A UTILIZAÇÃO DO CONTRAVENTAMENTO POR LINTÉIS

Modela-se via TMC o pilar de ponte em formato de núcleo estrutural C através da TPP, adotando-se assim, a subdivisão da seção de paredes finas em painéis deformáveis a flexão, porém com rigidez elevada ao corte. Na face aberta da seção será possibilitado o contraventamento parcialmente por lintéis, e estes espaçados de eixo a eixo de uma distância h , conforme apresentado na Figura 5a. Assim, na Figura 12a consta o mencionado pilar composto por 5 painéis–parede, onde as cotas são caracterizadas mediante o eixo esqueleto x tracejado no eixo dos referidos painéis–parede. Vide nas Figuras 12, 13a e 13b a subdivisão da seção de paredes finas, os esforços solicitantes por painéis–parede e as tensões de cisalhamento devido as interseções.

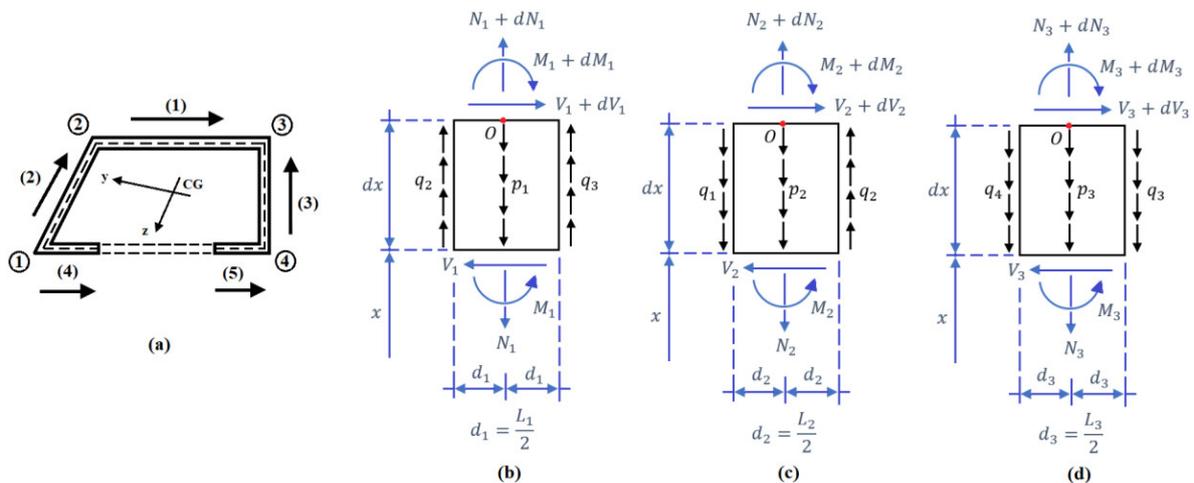


Figura 12: Pilar de ponte: (a) Modelo de painéis-parede, Elementos diferenciais (b) 1, (c) 2 e (d) 3

Utilizando as equações de George Alfred Maney, Maney [15] e Parcel e Maney [19], para equilibrar os lintéis de contraventamento. Bem como, procedendo-se o equilíbrio de forças verticais e de momentos no ponto O dos elementos diferenciais ilustrados nas Figuras 12b, 12c, 12d, 13a e 13b, e decorrente aplicação da equação diferencial da deflexão mediante teoria de Navier–Bernoulli para a linha elástica. Escreve-se os esforços cortantes por painel–parede, como:

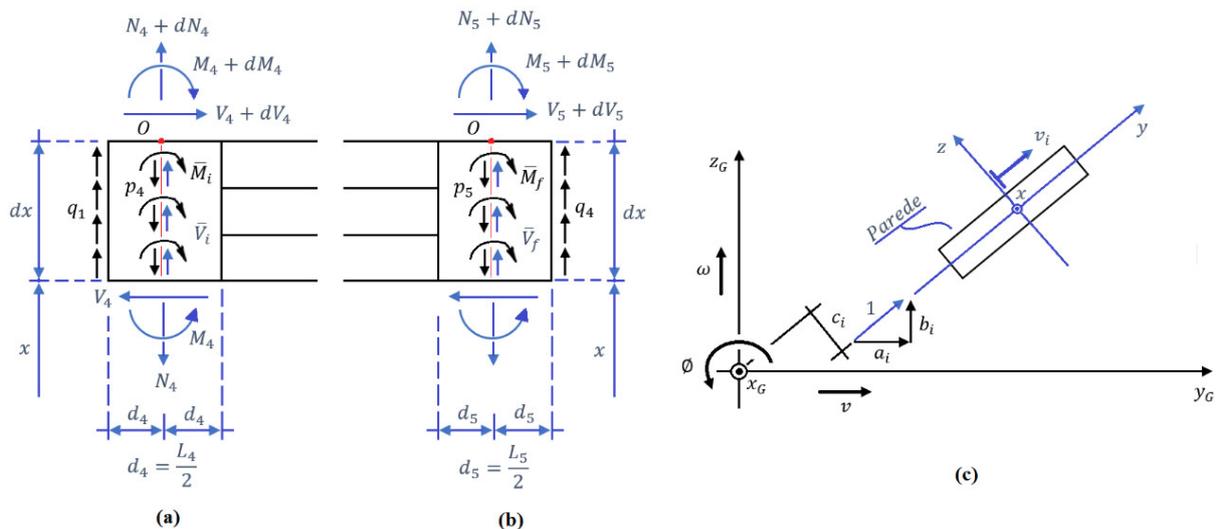


Figura 13: Elementos diferenciais do painel–parede (a) 4, (b) 5 e (c) transformação dos sistemas coordenados

$$\begin{aligned}
 V_1 &= -J_1 \cdot v_1''' + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2}, \\
 V_2 &= -J_2 \cdot v_2''' + (q_1 + q_2) \cdot \frac{L_2}{2}, \\
 V_3 &= -J_3 \cdot v_3''' + (q_4 - q_3) \cdot \frac{L_3}{2}, \\
 V_4 &= -J_4 \cdot v_4''' - q_1 \cdot \frac{L_4}{2} - \bar{M}_i, \\
 V_5 &= -J_5 \cdot v_5''' + q_4 \cdot \frac{L_5}{2} - \bar{M}_f.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Mediante deformação específica axial dos painéis–paredes em termos dos esforços normais de cada um dos referidos painéis, expressam-se as derivadas segundas dos deslocamentos δ_i , por:

$$\begin{aligned}
 (E \cdot A_1) \cdot \delta_1'' &= p_1 + q_2 - q_3, \\
 (E \cdot A_2) \cdot \delta_2'' &= p_2 + q_1 - q_2, \\
 (E \cdot A_3) \cdot \delta_3'' &= p_3 + q_3 + q_4, \\
 (E \cdot A_4) \cdot \delta_4'' &= p_4 - q_1 - \bar{V}_i, \\
 (E \cdot A_5) \cdot \delta_5'' &= p_5 - q_4 - \bar{V}_f.
 \end{aligned} \tag{25}$$

A compatibilidade dos deslocamentos verticais nos pontos de interseção é obtida a partir da convenção positiva para cima e de rotação no sentido horário. Considera-se também que as paredes são deformáveis à flexão e ao esforço normal, exprime-se por interseção a equivalência dos deslocamentos nas extremidades dos painéis–parede interligados, por:

$$\begin{aligned}
 \delta_2 + \frac{L_2}{2} \cdot v'_2 &= \delta_4 + \frac{L_4}{2} \cdot v'_4, \\
 \delta_2 - \frac{L_2}{2} \cdot v'_2 &= \delta_1 + \frac{L_1}{2} \cdot v'_1, \\
 \delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v'_1 &= \delta_3 - \frac{L_3}{2} \cdot v'_3, \\
 \delta_3 + \frac{L_3}{2} \cdot v'_3 &= \delta_5 - \frac{L_5}{2} \cdot v'_5.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Derivando-se a Eq. (25) duas vezes em relação ao eixo axial x e aplicando-se a Eq. (24), e ordenando-as em formato matricial, escreve-se:

$$\{q\} = [M_1]^{-1} \cdot [M_3] \cdot \{v'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{v'''\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\}, \tag{27}$$

sendo $\{q\}$ o vetor de carga distribuída verticalmente nas interseções dos painéis, $\{p\}$ o vetor do peso-próprio dos painéis-parede, $\{v_\omega\}$ e $\{v'_\omega\}$ os vetores de deslocamentos e de rotações dos painéis-parede, onde o índice ω expressa que as grandezas estão no sistema de local de referência, A_i e L_i a área da seção transversal e o comprimento do painel-parede i , respectivamente, b_i , t e b_f os coeficientes de rigidez das equações de Maney, e ω_i e ω_f as cotas do diagrama de ordenadas setoriais nos extremos inicial e final dos lintéis, respectivamente.

Analisando os esforços cortantes, constantes na Eq. (25), obtidos via equações de equilíbrio das paredes e ordenados matricialmente, ficam:

$$\{V_\omega\} = [M_5] \cdot \{v'''\} + [M_6] \cdot \{v'\} + [M_7] \cdot \{q\}, \tag{28}$$

sendo $\{V_\omega\}$ o vetor de esforços cortantes no sistema local de referências e $\{v'\}^T = \{v' \ \omega' \ \phi'\}$ o vetor de derivadas dos deslocamentos e rotações Centro de Gravidade (C.G.) no sistema global de referências.

Expressando-se o vetor $\{V_\omega\}$ em termos de $\{v'\}$ mediante substituição da Eq. (27) na Eq. (28). Além do mais, trasladando os vetores para o sistema global de referências, mediante transformação $\{v_\omega\} = [M_8] \cdot \{v\}$, constante na figura 13 (c), escreve-se:

$$\begin{aligned}
 \{V_\omega\} &= ([M_8] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_3]) \cdot \{v'\} + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \\
 &+ ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8] \cdot \{v'\}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Realizando o equilíbrio de esforços cortantes gerados pelo carregamento externo V_{ext} , obtém-se:

$$V_{ext} \cdot \{A^*\} = [M_8]^T \cdot \{V_\omega\} + [M_9] \cdot \{v'\} \tag{30}$$

com I_{t_i} sendo o momento de inércia torsional do painel-parede genérico i , θ_G o ângulo formado entre o eixo global y_G e o local y , da Figura 8 (c) e e_z a distância entre o Centro de Carga (C.C.)

e o Centro de Gravidade (C.G.), $[M_9] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot \sum_i^n I_{t_i} \end{bmatrix}$ e $\{A^*\} = \begin{Bmatrix} \cos(\theta_G) \\ \sin(\theta_G) \\ e_z \cdot \cos(\theta_G) \end{Bmatrix}$.

Resultará a Equação Diferencial do problema de Pilar em Núcleo Estrutural contraventado parcialmente por Lintéis espaçados da altura h , após aplicar a Eq. (30) na Eq. (29). Escreve-se tal equação diferencial, como:

$$-[J] \cdot \{v'''\} + [S] \cdot \{v'\} = \{V_f\} \tag{31}$$

sendo $[J] = -[M_8]^T \cdot ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8]$, $[S] = [M_8]^T \cdot ([M_6] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_3]) + [M_9]$ e $\{V_f\} = V_{ext} \cdot \{A^*\} - [M_8]^T \cdot ([M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}]) \cdot \{p\}$.

Por fim, realiza-se o translade do Centro de Gravidade (C.G.) para o Centro de Torção D, mediante matriz de transformação de coordenadas $[T]$, e reescreve-se a Eq. (31), como:

$$-[T]^T \cdot [J] \cdot [T] \cdot \{v_D'''\} + [T]^T \cdot [S] \cdot [T] \cdot \{v_D'\} = [T]^T \cdot \{V_f\} \quad (32)$$

sendo $\{v\} \equiv \{v_{CG}\} = [T] \cdot \{v_D\}$, $\{v_{CG}\}$ e $\{v_D\}$ os vetores de deslocamentos no Centro de Gravidade e no Centro de Torção, respectivamente, e $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{CG} \\ 0 & 1 & y_{CG} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de translade de coordenadas.

5 RESULTADOS E DICUSSÕES

5.1 EXEMPLO 1

A análise procedida será aplicada a um pilar de ponte de seção transversal aberta formada por paredes finas e contraventado parcialmente na altura por lintéis espaçados de eixo a eixo por $h = 3$ m e altura total $H = 90$ m. Na Figura 14, apresenta-se a configuração do pilar, para o qual procede-se a validação numérica, vide Tabela 1, mediante a dissertação de Xavier [35] e o artigo de Smith e Taranath [27]. Foram adotadas as seguintes dimensões na seção transversal: $b_y = b_z = 5$ m, $a_{1y} = a_{2y} = c = 1$ m e $t = 0,25$ m.

Tabela 1: Validação numérica das propriedades geométricas da seção de paredes finas mediante [27, 35]

Seção do Pilar em Núcleo	Resultados		Diagrama de Ordenadas Setoriais	Resultados		
	Os autores	Xavier [35]		Os autores	Xavier [35]	Smith e Taranath [27]
x_{CG} (m)	2,5	2,5	$\ \omega_1\ $ (m ²)	6,638	6,625	-----
y_{CG} (m)	2,941	2,94	$\ \omega_2\ $ (m ²)	5,862	5,875	-----
I_z (m ⁴)	20,284	20,28	$\ \omega_5\ $ (m ²)	13,517	13,525	-----
I_y (m ⁴)	15,328	15,34	I_ω (m ⁶)	100,674	100,67	100,674
I_t (m ⁴)	8,854	8,85	d_z (m)	2,655	2,65	2,655
($x 10^{-2}$)			d_y (m)	2,499	2,5	-----

O módulo de elasticidade longitudinal utilizado foi de $E = 20 \times 10^6$ kN/m², o coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$ e carga uniformemente distribuída na altura $q_1 = 9,418$ kN/m. E via geometria, o braço de alavanca $e_z = z_D = 4,714$ m e por conseguinte um momento de torção distribuído também uniformemente $m = 44,393$ kN · m/m. Vide Tabela 2 a validação dos valores de rotação ϕ no topo do pilar, constatando-se boa convergência na primeira casa decimal, sendo esta precisão (em termos de rotações) suficiente para as verificações no ELS.

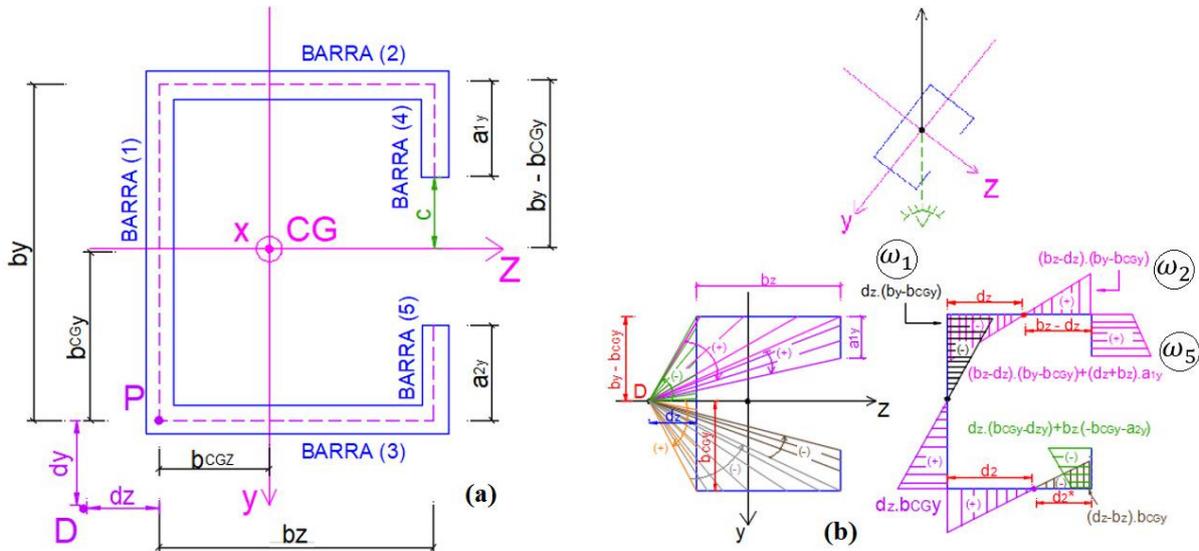


Figura 14: (a) Seção transversal do pilar em Núcleo e (b) Diagrama de Ordenadas Setoriais

Tabela 2: Validação numérica da rotação no topo do pilar em formato de núcleo C

$q_1^* = q_1 + p$ (kN/m)	Rotação ϕ (rad)			
	Os autores		Xavier [35]	
	Teoria de Flexo-Torção (TFT)	Teoria dos Painéis-Parede (TPP)	Método de Stodola - Vianello	Método das Diferenças Finitas
$p = 0$ kN/m	- 0,087 ($\approx 0,09$)	- 0,137 ($\approx 0,1$)	- 0,097 ($\approx 0,1$)	- 0,097 ($\approx 0,1$)

5.2 EXEMPLO 2

Adota-se a dissertação de Barbosa [1] em dois cenários de carregamento: Cenário 1 – momento de torção distribuído $m = 24922,5 \text{ lb} \cdot \text{ft}/\text{ft}$ e Cenário 2 – momento de torção concentrado no topo $M_{tH} = 155765 \text{ lb} \cdot \text{ft}$. O pilar em questão será modelado com 187,5 ft de altura com travamentos de lintéis a cada $h = 12,5 \text{ ft}$. Vide Tabela 3 com os valores de rotação ϕ (rad) e Bimomento B ($\text{lb} \cdot \text{ft}^2$), verificando além da TMC, o MEF.

Tabela 3: Validação numérica da rotação e do bimomento mediante Barbosa [1]

Andar	Cenário 1						Cenário 2		
	ϕ ($\cdot 10^{-2}$ rad)			B ($\cdot 10^8 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$)			B ($\cdot 10^7 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$)		
	Autores	[1]	MEF	Autores	[1]	MEF	Autores	[1]	MEF
Base (0 ft)	0,00	0,00	0,00	-3,65	-3,66	-3,65	-2,28	-2,28	-2,28
$\Delta(\%)$	-----	Ref.	-----	0,27	Ref.	0,27	-----	Ref.	-----
4º (50 ft)	-0,17	-0,17	-0,17	-1,72	-1,71	-1,72	-1,57	-1,56	-1,57
$\Delta(\%)$	-----	Ref.	-----	0,58	Ref.	0,58	0,64	Ref.	-----
9º (112,5 ft)	-0,65	-0,65	-0,65	-0,34	-0,36	-0,35	-0,81	-0,81	-0,81
$\Delta(\%)$	-----	Ref.	-----	5,55	Ref.	2,77	-----	Ref.	-----
Topo (187,5 ft)	-1,32	-1,32	-1,32	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\Delta(\%)$	-----	Ref.	-----	-----	Ref.	-----	-----	Ref.	-----

E para tal exemplo utilizou-se $b_y = b_z = 19 \text{ ft}$, $a_{1y} = a_{2y} = 4,5 \text{ ft}$, $t = 1 \text{ ft}$, $\alpha =$

$0,944, I_z = 4492,5 \text{ ft}^4, d_z = 10,43 \text{ ft}, I_\omega = 3,77629 \times 10^5 \text{ ft}^6, I_t = 22 \text{ ft}^4, \nu = 0,15, E = 5,76 \cdot 10^8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}, G = 2,504 \cdot 10^8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$. Sendo “Ref.” na tabela 3 o valor de referência para o cálculo dos erros Δ . Verificando-se o erro médio de 1,96 %.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da Técnica do Meio Contínuo mediante Teoria dos Painéis–Parede e a Teoria da Flexo–Torção mostraram-se boas soluções para o problema de pilar contraventado ou não parcialmente por lintéis, esses espaçados da distância h . Para tal afirmação de boa aplicabilidade utilizou-se como resultados canônicos as dissertações de mestrado de Xavier [35] e Barbosa [1], bem como o artigo de solução exata, como se procede neste artigo, para o problema e formulado por Smith e Taranath [27], mesmo que em [27] exista um caso particular do presente artigo. A Técnica do Meio Contínuo representa a operacionalização de linguagem de programação mais prática e custo computacional bem menor do que o Método dos Elementos Finitos, mesmo que esse processado para grandes elementos. Porém cabe mencionar que o quantitativo de deduções matemáticas é bem mais elevado na referida técnica contínua.

No exemplo 2, ressalta-se que a validação numérica do Cenário 1, mediante a Teoria dos Painéis–Parede, é realizada por imposição da distância h de eixo a eixo dos lintéis igual a altura total do pilar. Quanto aos sinais no bimomento, obtido via artigo de Smith e Taranath [27], percebe-se que é mera discordância de convenção de sinais. No mais, observa-se a coerência da rotação nula na base ($x = 0$), para todas as teorias e cenários utilizados, tanto quanto bimomento nulo no topo do pilar ($x = H = 100 \text{ m}$). E um erro médio de 1,96 %.

No mencionado exemplo são abordadas duas teorias de análise estrutural para os pilares de pontes, sendo elas: a Teoria da Flexo–Torção e a Teoria dos Painéis–Parede. Procede-se também a aplicação numérica num pilar de ponte submetido a dois cenários de carregamento, com a possibilidade ou não de contraventamento por lintéis ao longo da altura. Na aplicação numérica é empregado o Método dos Elementos Finitos com elementos finitos de barra (grandes e de altura h) e formulados pelas equações constitutivas à flexão e à flexo–torção. O que valida de forma satisfatória os resultados obtidos via correspondência de rotação ϕ e de bimomento B por entre as teorias abordadas, bem como pela proximidade com o elemento finito na ordem de 1,21 %.

REFERÊNCIAS

- [1] J. A. Barbosa. *Edifícios com paredes de secção aberta contraventada por lintéis, sob carga lateral*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1978.
- [2] R. A. G. Battistelle. *Cálculo dos deslocamentos laterais de painéis planos considerando as deformações axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1991.
- [3] W. E. Boyce e R. C. Dprima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. LTC, 2006.
- [4] F. A. C. Carvalho. *Instabilidade de edifícios com paredes de secção aberta contraventada por lintéis*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1980.
- [5] J. L. Costa. *Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1984.

- [6] A. Danay, M. Gellert e J. Gluck. The axial strain effects on load distribution in nonsymmetric tier buildings. *Building science*, 9:251–29, 38.
- [7] J. Gluck e M. Gellert. Lateral – load analysis of asymmetric multistory structures. *Journal of the structural division*, 96:317–333, 1970.
- [8] J. Gluck e M. Gellert. Buckling of lateral restrained thin–walled cantilevers of open cross section. *Journal of the structural division*, 98:2031–2042, 1972.
- [9] A. C. Heidebrecht e R. D. Swift. Analysis of asymmetrical coupled shear walls. *Journal of the structural division*, 97:1407–1422, 1971.
- [10] A. C. Heidebrecht e B. S. Smith. Approximate analysis of open – section shear walls subject to torsional loading. *Journal of the structural division*, 99:2355–2373, 1973.
- [11] M. A. H. Khan e B. S. Smith. Restraining of bracing in thin – walled open sections beams. *Proceedings of the institution of civil engineers*, 59:67–78, 1975.
- [12] C. F. Kollbrunner e K. Basler. *Torsion in structures*. Springer – Verlag, 1969.
- [13] J. E. Laier. *Estudo do comportamento dinâmico de estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo*. Tese de livre – docência, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1984.
- [14] T. V. Langendonck. *Resistência dos materiais: deformações*, volume 1. Blucher, 1960.
- [15] G. A. Maney. Secondary stresses and other problems in rigid frames: a new method of solution. *Studies in engineering*, 1:1–17, 1915.
- [16] J. C. M. Marques. *Estruturas tubulares de edifícios altos submetidas à torção*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1983.
- [17] D. D. Mori e J. Munaiar Neto. *Flexo – Torção: barras com seção aberta e paredes delgadas – teoria e exemplos*. USP, 2ª edição, 2017.
- [18] M. T. M. Nemir. *Finite element stability analysis of thin–walled steel structures*. Tese de doutorado, Department of civil engineering, University of Salford, Manchester, England, 1985.
- [19] J. I. Parcel e G. A. Maney. *An elementary treatise on statically indeterminate stresses*. John Wiley & Sons, 1944.
- [20] S. P. B. Proença. *Mecânica das estruturas aeronáuticas*, volume 2. São Paulo: USP, 2009.
- [21] M. Rachid. *Instabilidade de barras de seção delgada*. Tese de doutorado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1975.
- [22] S. R. S. Ribeiro. *Associação tridimensional de pórticos e paredes de seção aberta em estruturas de edifícios altos*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1987.
- [23] R. Rosman. Application of variational methods in the theory of tall building structures. *Proceedings of the international conference on variational methods in engineering*, EDA006:11/68–11/83, 1972.
- [24] C. G. Salmon, J. E. Johnson e F. A. Malhas. *Steel structures design and behavior*. Pearson, 5th edition, 2009.
- [25] F. Schiel. *Introdução à resistência dos materiais*, fascículo 2. USP, 1983.
- [26] J. L. F. A. Serra e T. Yagui. Análise de núcleos estruturais contraventados ou não por lintéis, considerando a deformação por cortante. In *XVII Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural*, 1:265–276, 1995.

- [27] B. S. Smith e B. S. Taranath. The analysis of tall core – supported structures subject to torsion. *Proceedings of civil engineering*, 173–187, 1972.
- [28] B. S. Smith e A. Abate. The effects of shear deformations of the shear center of open – section thin – walled beams. In *Proceedings of the institution of civil engineers*, 77:57–66, 1984.
- [29] B. S. Smith e A. Coull. *Tall building structure: analysis and design*. John Wiley, 1991.
- [30] W. K. Tso e J. K. Biswas. Analysis of core wall structure subjected to applied torque. *Building science*, 8:251–257, 1973.
- [31] W. K. Tso e J. K. Biswas. General analysis of nonplanar coupled shear walls. *Journal of the structural division*, 99:365–380, 1973.
- [32] B. Z. Vlassov. *Pièces longues en voiles minces*. Editions Eyrolles, 2ª edição, 1962.
- [33] N. Wakabayashi e T. Yagui. Núcleos estruturais de edifícios elevados. In *Conferência regional sulamericana sobre edifícios altos*, 158–170, 1973.
- [34] J. H. Wynhoven, P. F. Adams, J. K. Biswas e W. K. Tso. Discussions of lateral – load analysis of asymmetric multistory structures. *Journal of structural engineering*, 96:2538–2544, 1970.
- [35] M. A. P. Xavier. *Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1987.
- [36] M. A. P. Xavier e W. I. G. Melo. *Análise de efeitos de segunda ordem em núcleo estrutural de seção aberta sem e com contraventamento*. In: Engenharia civil – temas, técnicas e aplicações. Unipê, Capítulo 27, 2018.
- [37] T. Yagui e J. L. F. A. Serra. The effects of normal forces on the shear center of the sections of tall core – supported structures. In *XVII Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural*, 1:277–287, 1995.
- [38] G. K. Yoshida. *Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço*. Dissertação de mestrado, EESC–USP, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, Brasil, 1988.